Révision arithmétique

EXERCICE 1

La croix des mélanges

Dans des manuels de mathématiques du début du XX^{e} siècle, on enseignait une méthode appelée « *la croix des mélanges* ». Il s'agissait d'un algorithme, appuyé sur un schéma, pour déterminer les proportions d'un mélange comme l'illustre l'exemple qui suit. « *On a du vin à 75 centimes de franc !* » le litre et du vin à 60 centimes le litre. Dans quelles proportions faut-il les mélanger pour avoir du vin qui revienne à 70 centimes le litre ?
On dispose généralement de la manière suivante les éléments du problème et sa résolution :

75 . . . 70 60 . . .	75 . . . 70 60 5	75 10 70 60 5	75 10 70 60 5
Étape 1 : les données	Étape 2 : calcul par différence sur l'axe indiqué en gras.	Étape 3 : calcul par différence sur l'autre axe.	Étape 4 : réponse. *On obtient alors 15 litres de vin à 70 centimes le litre.* *"On devra donc mélanger les vins dans la proportion de 10 à 5 ou de 2 à 1"*

1) Dans l'exemple ci-dessus :
   a) Vérifier par le calcul que les 15 litres de vin obtenu selon le mélange proposé à la fin de l'étape 4 reviennent bien à 70 centimes le litre.
   b) Dans un litre de ce vin à 70 centimes le litre, donner sous forme de fraction la proportion de chaque type de vin composant le mélange.
2) Appliquer l'algorithme ci-dessus pour obtenir un vin à 66 centimes le litre à partir d'un vin à 80 centimes le litre et d'un vin à 60 centimes le litre. Construire le schéma associé à ces nouvelles données et donner la proportion du mélange final.
3) Un problème plus contemporain « Une enseignante achète 15 albums de littérature de jeunesse pour sa classe. Elle choisit des albums à 8 € et d'autres à 13 € pour une dépense totale de 150 €. Combien a-t-elle acheté d'albums de chaque type ? »

   Dans les questions qui suivent, on propose plusieurs méthodes de résolution que l'on mettra en œuvre de manière indépendante.

   a) **Méthode n° 1 utilisant l'algorithme de la croix des mélanges.**
   Reproduire le schéma ci-dessous sur votre feuille, le compléter puis donner une solution au problème.

   13 . . .
   10
   8 . . .

b) **Méthode n° 2 résolution algébrique**.
On note x et y les nombres respectifs d'albums à 13 € et à 8 €.
Résoudre le problème de façon algébrique.

c) **Méthode n° 3 utilisant un tableur**
Le tableau ci-dessous correspond à une feuille de tableur donnant la somme payée selon le nombre d'albums à 8 € et le nombre d'albums à 13 € achetés.
La ligne verticale correspond aux albums à 13 € et la ligne horizontale aux albums à 8 €.
Proposer une formule entrée dans le tableur pour calculer le nombre de la case grisée (ligne 4, colonne L) ?
Pourquoi n'est-il pas utile d'aller au-delà de la colonne U ou de la ligne 14 ?
Utiliser cette feuille de calcul pour résoudre le problème.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	0	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152
3	1	13	21	29	37	45	53	61	69	77	85	93	101	109	117	125	133	141	149	157	165
4	2	26	34	42	50	58	66	74	82	90	98	106	114	122	130	138	146	154	162	170	178
5	3	39	47	55	63	71	79	87	95	103	111	119	127	135	143	151	159	167	175	183	191
6	4	52	60	68	76	84	92	100	108	116	124	132	140	148	156	164	172	180	188	196	204
7	5	65	73	81	89	97	105	113	121	129	137	145	153	161	169	177	185	193	201	209	217
8	6	78	86	94	102	110	118	126	134	142	150	158	166	174	182	190	198	206	214	222	230
9	7	91	99	107	115	123	131	139	147	155	163	171	179	187	195	203	211	219	227	235	243
10	8	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176	184	192	200	208	216	224	232	240	248	256
11	9	117	125	133	141	149	157	165	173	181	189	197	205	213	221	229	237	245	253	261	269
12	10	130	138	146	154	162	170	178	186	194	202	210	218	226	234	242	250	258	266	274	282
13	11	143	151	159	167	175	183	191	199	207	215	223	231	239	247	255	263	271	279	287	295
14	12	156	164	172	180	188	196	204	212	220	228	236	244	252	260	268	276	284	292	300	308

Numération

EXERCICE 2

1) Un nombre de trois chiffres est tel que :
   - la somme de ses trois chiffres est égale à 14 ;
   - ce nombre est plus grand que son nombre « retourné » (exemple : si le nombre est 651, son nombre « retourné » est 156) ;
   - la différence entre ce nombre et son nombre « retourné » est 99 ;
   - la différence entre le double du chiffre des dizaines et le triple du chiffre des centaines est égale à 2.

   Trouver ce nombre en expliquant votre démarche.

2) En observant les nombres 297, 880 et 242, un élève a formulé la conjecture « tout nombre à trois chiffres dans lequel le chiffre des dizaines est la somme du chiffre des centaines et du chiffre des unités est divisible par 11 ».
   a) Cette conjecture s'applique-t-elle au nombre trouvé à la question 1 ?
   b) La conjecture de l'élève est-elle effectivement vraie ? Justifier la réponse.
   c) Trouver un nombre de 3 chiffres qui soit divisible par 11 et dans lequel le chiffre des dizaines n'est pas la somme du chiffre des centaines et de celui des unités.

Exercice 3

a, b, c désignent trois chiffres distincts et différents de 0.

A cet ensemble de trois chiffres, on associe la famille des six nombres à trois chiffres qui s'écrivent en utilisant une fois le chiffre a, une fois le chiffre b et une fois le chiffre c. Par exemple, aux trois chiffres 2, 5 et 7, on associe la famille constituée des six nombres suivants : 257, 275, 527, 572, 725 et 752.

On appelle S la somme des six nombres de la famille et M leur moyenne.

1) Calculer S et M correspondant à la famille donnée dans l'exemple ci-dessus.
2) Montrer que dans le cas général on a : $M = 37(a + b + c)$.
3) Trouver tous les ensembles de trois chiffres distincts et différents de 0 qui permettent de former une famille dont la moyenne M des six nombres vaut 370.

Exercice 4

Nombres impairs

Toutes les réponses seront justifiées.

1) Donner les restes des divisions par 6 et par 3 de chacune des trois sommes suivantes :
$$5 + 7 + 9 \quad ; \quad 15 + 17 + 19 \quad ; \quad 1\,527 + 1\,529 + 1\,531$$
2) Plus généralement :
   a) Donner le reste de la division par 6 de la somme de trois nombres impairs consécutifs.
   b) Donner le reste de la division par 3 de la somme de trois nombres impairs consécutifs.
3) Trouver trois nombres impairs consécutifs dont la somme est 12 027.
4) On cherche un nombre p tel que la somme de p nombres entiers impairs consécutifs soit toujours un multiple de 5. Déterminer la plus petite valeur possible de p.

Exercice 5

Rugby et Arithmétique

1) Déterminer toutes les décompositions additives du nombre 33, en utilisant seulement les nombres 3, 5 et 7, sans nécessairement les utiliser tous (à titre d'exempte, on peut écrire $33 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 3$). On présentera clairement la méthode choisie pour déterminer ces décompositions.
2) Au rugby, les équipes marquent des points lors de quatre phases de jeu
   - En réussissant un coup de pied de pénalité pour 3 points,
   - En réussissant un drop pour 3 points,
   - En marquant un essai non transformé pour 5 points,
   - En marquant un essai transformé pour 7 points.

   a) Yanis affirme que son équipe a marqué 33 points grâce à deux essais et plusieurs pénalités. Est-ce possible ? Justifier.

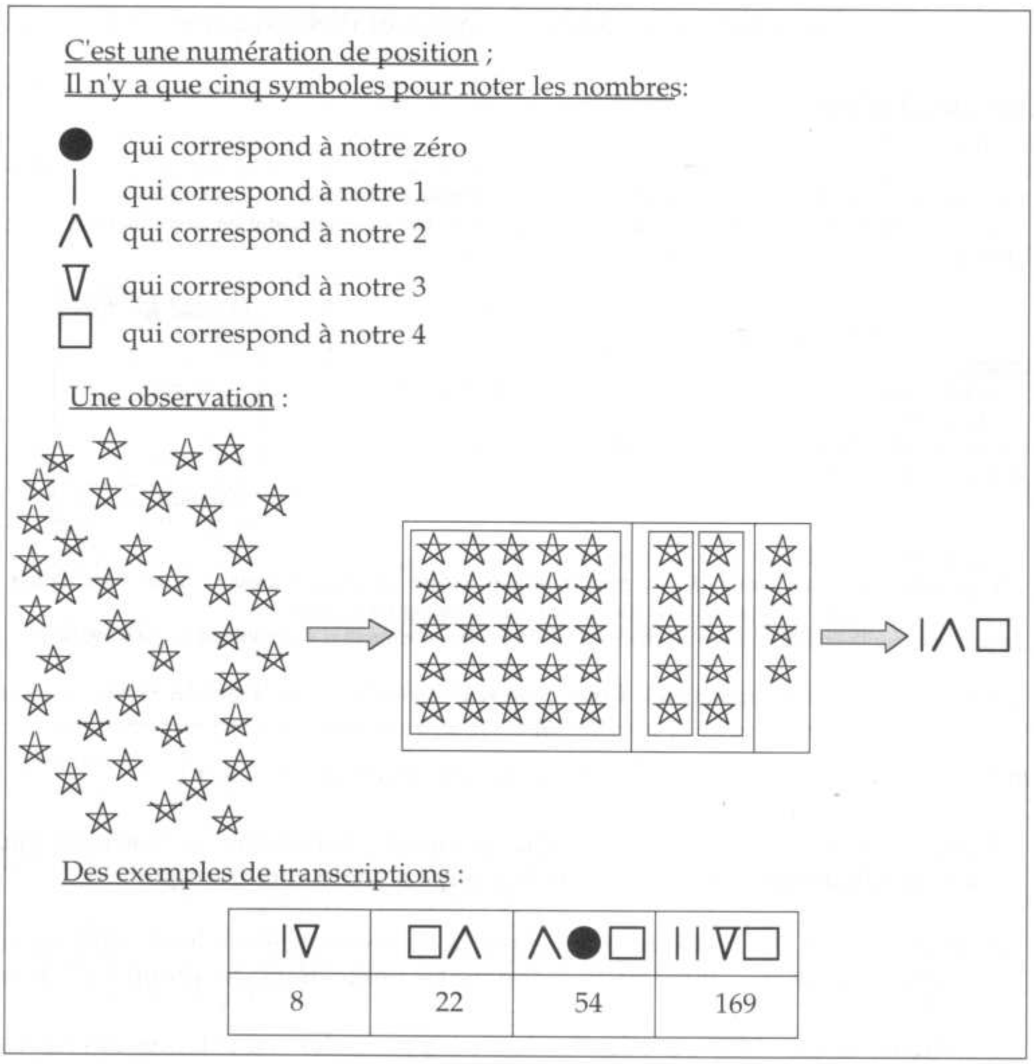
b) Paul affirme que son équipe a marqué 27 points grâce à deux essais, et en réussissant autant de drops que de pénalités. Est-ce possible ? Justifier.

c) Une équipe a marqué 20 points. Sachant qu'aucun drop n'a été réussi, trouver toutes les manières dont ces 20 points ont pu être obtenus.

EXERCICE 6

L'écriture des nombres chez les *Cincofiles*

Dans la tribu des *Cincofiles*, on a une manière particulière de compter. Lors d'un voyage dans cette tribu, un chercheur a ramené un certain nombre d'observations qu'il a retranscrites dans un carnet. On trouvera ci-dessous ce qu'il a noté sur la manière de compter des Cincofiles.



C'est une numération de position ;
Il n'y a que cinq symboles pour noter les nombres:

● qui correspond à notre zéro
| qui correspond à notre 1
∧ qui correspond à notre 2
∇ qui correspond à notre 3
□ qui correspond à notre 4

Une observation :

Des exemples de transcriptions :

|∇	□∧	∧●□	||∇□
8	22	54	169

1) En explicitant la démarche

a) Transcrire dans notre système de numération le nombre noté par les *Cincofiles* « □□□ ».

b) Transcrire dans le système *Cincofile* le nombre que nous notons « 273 ».

2) Sans passer par une transcription dans notre système de numération décimale et en justifiant la réponse écrire

a) le nombre qui précède le nombre « ∇ □ ●» dans le système *Cincofile*.

b) le nombre qui suit le nombre « ∧ □ □» dans le système *Cincofile*.

Ces deux derniers nombres seront donnés en écriture *Cincofile*.

EXERCICE 7

Alice dans la forêt de l'Oubli

Alice, perdue dans la Forêt de l'Oubli, ne se souvenait jamais du jour de la semaine. Heureusement, un Lion et une Licorne visitaient souvent cette forêt étrange et pouvaient parfois la tirer de cette embarrassante ignorance.
Alice savait cependant que lundi, mardi et mercredi le Lion ne disait jamais une phrase vraie et ne mentait pas pendant le reste de la semaine.
La Licorne ne faisait que mentir jeudi, vendredi et samedi et disait la vérité pendant les autres jours.

1) Alice surprit un jour la conversation suivante entre le Lion et la Licorne
   — Lion : "Hier, je mentais."
   — Licorne : "Moi aussi."

   Alice avait un raisonnement logique infaillible. Elle a pu en déduire le jour de la semaine. Indiquer ce jour et le raisonnement utilisé.
2) Une autre fois, Alice rencontra seulement le Lion qui prononça les deux phrases suivantes
   — "Je mentais hier."
   — "Je mentirai de nouveau dans trois jours." Quel jour cette rencontre a-t-elle eu lieu ? (Justifier la réponse).
3) Déterminer quels jours la phrase suivante a pu sortir de la gueule du Lion
   "Hier je mentais et je mentirai de nouveau demain." (Justifier la réponse).

(D'après Raymond Sullivan : *What is the nome of this book ?*, Penguin books).

EXERCICE 8

Nombres décimaux

1) On a déplacé la virgule d'un nombre décimal d de deux rangs vers la droite. Le nombre a augmenté de 727,452 . Trouvez le nombre d.
2) On a intercalé un zéro entre la virgule et la partie décimale d'un nombre décimal b, le nombre a diminué de 0,684. Déterminez la partie décimale de b. Trouvez b sachant que sa partie entière est le plus petit multiple commun non nul de 12, 14, et 27.

EXERCICE 9

On cherche tous les nombres entiers naturels de cinq chiffres vérifiant les deux conditions suivantes :

- leur écriture décimale n'utilise que deux chiffres différents,
- la somme de leurs cinq chiffres est égale à 11.

1) Les chiffres 1 et 3 permettent d'écrire de tels nombres : en donner la liste complète.

2) Trouver toutes les autres paires de chiffres possibles pour écrire les nombres cherchés.
3) Combien y-a-t-il de nombres entiers de cinq chiffres vérifiant les deux conditions ?