# Utiliser l'inverse d'une matrice pour résoudre un système d'équations & courbes polynomiales

**<u>Exercice 1</u>** : Dans une ferme, il y a des lapins et des poules. On dénombre 58 têtes et 160 pattes. Combien y a-t-il de lapins de moins que de poules ?

**Solution:**

- On choisit les deux inconnues :
  - $x$ le nombre de lapins ;
  - $y$ le nombre de poules.

  Le nombre de têtes étant de 58, on a l'égalité :
  $$x + y = 58$$
  Le nombres de pattes étant de 160, on a l'égalité :
  $$4x + 2y = 160$$
  On obtient ainsi le système :
  $$\begin{cases} x + y = 58 \\ 4x + 2y = 160 \end{cases}$$
- Ce système peut se traduire sous la forme matricielle $AX = B$ avec :
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 58 \\ 160 \end{pmatrix}$$
- Il reste à vérifier que la matrice du système A est inversible, auquel cas on aurait :
  $$AX = B \Longleftrightarrow X = A^{-1}B$$
  A la calculatrice, on obtient :
  $$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ 2 & -0,5 \end{pmatrix}$$
- On effectue le calcul :
  $$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ 2 & -0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 58 \\ 160 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \times 58 + 0,5 \times 160 \\ 2 \times 58 - 0,5 \times 160 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 22 \\ 36 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
  Donc $x = 22$ et $y = 36$.
  Finalement, il y a $36 - 22 = 14$ lapins de moins que de poules.

**<u>Exercice 2</u> : Stères de bois**
*D'après BAC Pro Maintenance de matériels 2008*

Pour mesurer la quantité de bois de chauffage, on utilise comme unité le stère. Lorsqu'un stère de bois est coupé en bûches, il occupe un volume qui dépend de la longueur de coupe comme indiqué ci-dessous :

- un stère de bûches de longueur 1 mètre occupe un volume de $1m^3$ ;

- un stère de bûches de longueur 0,5 mètre occupe un volume de $0,8m^3$ ;
- un stère de bûches de longueur 0,33 mètre occupe un volume d'environ $0,68m^3$.

Pour une longueur L de bûches donnée, le nombre de stères $n$ est proportionnel au volume V occupé par le bois rangé. Le coefficient de proportionnalité $k_L$, dont la valeur dépend de la longueur de coupe, vérifie la relation $n = k_L \times V$.
Pour des longueurs de bûches L comprises entre 0,20 m et 1 m, le coefficient de proportionnalité $k_L$ peut être calculé à l'aide de la formule suivante :

$$k_L = aL^3 + bL^2 + cL + d$$

où a, b, c et d sont des réels à déterminer.
**a.** Avec les données fournies, déterminer les valeurs exactes de $k_1$ et $k_{0,5}$.

**Solution:** Pour $k_1$, on a : $1 = k_1 \times 1$ donc : $k_1 = 1$.
Pour $k_0, 5$, on a : $1 = k_0, 5 \times 0, 8$ donc $k_0, 5 = \frac{1}{0,8} = 1, 25$.

**b.** En admettant que $k_{0,8} = 1, 1$ et que $k_{0,2} = 1, 76$, à l'aide de la question **a**, déterminer un système vérifié par les inconnues a, b, c et d.

**Solution:** $k_1 = 1$ donc $a + b + c + d = 1$.
$k_0, 5 = 1, 5$ donc $0, 125a + 0, 25b + 0, 5c + d = 1, 25$.
$k_0, 8 = 1, 1$ donc $0, 512a + 0, 64b + 0, 8c + d = 1, 1$.
$k_0, 2 = 1, 76$ donc $0, 008a + 0, 04b + 0, 2c + d = 1, 76$.
On a donc le système :

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 0,125a + 0,25b + 0,5c + d = 1,25 \\ 0,512a + 0,64b + 0,8c + d = 1,1 \\ 0,008a + 0,04b + 0,2c + d = 1,76 \end{cases}$$

**c.** Résoudre le système précédent à l'aide d'un calcul matriciel. En déduire l'expression de $k_L$ en fonction de L.

**Solution:** Le système d'équations précédent s'écrit sous forme matricielle : $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,125 & 0,25 & 0,5 & 1 \\ 0,512 & 0,64 & 0,8 & 1 \\ 0,008 & 0,04 & 0,2 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,25 \\ 1,1 \\ 1,76 \end{pmatrix}$$

On cherche $A^{-1}$ à la calculatrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{25}{2} & \frac{200}{9} & -\frac{250}{9} & -\frac{125}{18} \\ -\frac{75}{4} & -\frac{400}{9} & \frac{425}{9} & \frac{575}{36} \\ \frac{33}{4} & \frac{232}{9} & -\frac{200}{9} & -\frac{425}{36} \\ -1 & -\frac{32}{9} & \frac{25}{9} & \frac{25}{9} \end{pmatrix}$$

$$\text{On détermine } X \text{ par :} X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 5,75 \\ -4,75 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Finalement : $k_L = -2,5L^3 + 5,75L^2 - 4,75L + 2,5$.

**d.** Déterminer avec ce qui précède la valeur de $k_{0,6}$.
Déterminer alors le volume occupé par un stère de bois coupé en bûches de 0,60 m (donner le résultat arrondi au centième).

**Solution:** $k_0, 6 = 1,18$ donc le volume occupé par un stère de bois coupé en bûches de 0,6 m est de : $V = \frac{1}{1,18}$, soit environ $0,85m^3$.

<u>**Exercice 3**</u> :
On considère la fonction $f$ définie sur $\Re$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des coefficients réels.
On donne $f$(-0,5)=7, $f$(1)=4 et $f$(1,5)=5.

**a.** Montrer que les informations sur $f$ se traduisent sous la forme $AX = B$ où $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et A et B deux matrices à préciser.

**Solution:**

$$f(0,5) = 7 \iff 0,25a - 0,5b + c = 7$$

$$f(1) = 4 \iff a + b + c = 4$$

$$f(1,5) = 5 \iff 2,25a + 1,5b + c = 5$$

Les données précédentes se traduisent sous forme matricielle par :

$$AX = B \text{ avec} X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

.

$$\begin{pmatrix} 0,25 & -0,5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2,25 & 1,5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

**b.** En déduire les coefficients a, b et c.

**Solution:** A la calculatrice, on obtient : $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{5}{6} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On obtient donc l'inconnue $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Pour tout réel $x$ : $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

**Exercice 4** :
*D'après BAC Pro Aéronautique 2008*

Après arrêt d'un moteur turbo propulseur, l'hélice d'un avion continue à tourner librement jusqu'à son arrêt. Son mouvement est un mouvement de rotation uniforme décéléré. Le nombre de tours $N$ effectués en fonction du temps t (en secondes) est donné par $N$=$f(t) = at^2 + bt$, où a et b sont des réels à déterminer et $t \in [0; 72,5]$.

**a.** Sachant que l'hélice étudiée effectue 250 tours en 20 secondes et 510 tours en une minute, déterminer le système d'équations d'inconnues a et b correspondant à ces données.

**Solution:**

$$f(20) = 250 \iff 400a + 20b = 250$$

$$f(60) = 510 \iff 3600a + 60b = 510$$

Comme dans l'exercice précédent, les données précédentes se traduisent sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 400 & 20 \\ 3600 & 60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 510 \end{pmatrix}$$

**b.** Résoudre ce système à l'aide d'un calcul matriciel et en déduire l'expression de $f$(t).

**Solution:**

$$AX = B \iff X = A^{-1}B$$

A l'aide de la calculatrice : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{800} & \frac{1}{2400} \\ \frac{3}{40} & -\frac{1}{120} \end{pmatrix}$.

On trouve : $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -0,1 \\ 14,5 \end{pmatrix}$

Donc pour $t \in [0; 72,5]$ : $f(t) = -0,1t^2 + 14,5t$.

**c.** On admet que la fréquence de rotation de l'hélice est donnée par la dérivée $f$' de la fonction $f$. Déterminer $f$'(t) pour $t \in [0; 72,5]$, puis déterminer le nombre de tours effectués par l'hélice jusqu'à son arrêt (arrondir à l'unité).

**Solution:** Pour $t \in [0; 72,5]$, $f'(t) = -0,2t + 14,5$. Lorsque l'on arrête le moteur : $f'(t) = 0 \iff t = \frac{14,5}{0,2} = 72,5$.
L'hélice aura alors effectué f(72,5) tours, soit environ 526 tours.