Correction Bac blanc mai 2013

Exercice 1

Commun à tous les candidats. 4 points (1 point par bonne réponse)

1. La fonction F définie sur $\Re$ par $F(x) = e^{-x^2}$ est une primitive de la fonction f définie par :

   A. $f(x) = -xe^{-x^2}$ B. $f(x) = -2xe^{-x^2}$

   C. $f(x) = xe^{-x^2}$ D. $f(x) = e^{-x^2}$

> **Solution:** Calculons $F'(x)$.
> D'après la propriété admise du cours, si U est une fonction dérivable sur $\Re$ alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur $\Re$ et $exp'(U(x)) = U'(x) \times e^{u(x)}$.
> Ici, $U(x) = -x^2$. On a donc $U'(x) = -2x$ et $F'(x) = -2x \times e^{-x^2}$.
> La bonne réponse est donc la réponse **B.** $f(x) = -2xe^{-x^2}$.

2. Soit la fonction h définie sur $\Re$ par $h(x) = (7x - 23)e^x$.
   L'équation $h(x) = 0$

   A. a pour solution 2,718 B. a une solution sur $[0; +\infty[$

   C. a deux solutions sur $\Re$ D. a une solution sur $[-\infty; 0]$

> **Solution:** Comme vu en cours, la fonction exp est strictement positive sur $\Re$, $h(x) = 0$ pour $7x - 23 = 0$.
> $7x - 23 = 0 \iff x = \frac{23}{7}$.
> L'équation $h(x) = 0$ a pour solution $x = \frac{23}{7}$.
> La bonne réponse est donc la réponse **B.**. L'équation $h(x)$ a une solution sur $[0; +\infty[$.

3. On pose $I = \int_0^1 3e^{3x}dx$.
   On peut affirmer que :

   A. $I = e^3 - 1$ B. $I = 3e^3 - 3$

   C. $I = 19,1$ D. $I = 1 - e^3$

> **Solution:** Calculons l'intégrale $I = \int_0^1 3e^{3x}dx$.
> Pour cela, nous allons d'abord calculer la primitive F :$x \mapsto 3e^{3x}$.
> D'après le cours, la fonction $x \mapsto e^{U(x)}$ admet une primitive de la forme $\frac{1}{U'}e^U$.
> Ici, nous avons $U(x) = 3x$, donc $U' = 3$ et $F(x) = \frac{3}{3}e^{3x} = e^{3x}$.
> D'après le cours, $I = F(1) - F(0) = e^3 - 1$. La bonne réponse est la réponse **A**.

4. La fonction g définie sur $\Re$ par $g(x) = x^3 - 9x$ est convexe sur l'intervalle :

   A. $]-\infty; +\infty[$ B. $[0; +\infty[$

   C. $]-\infty; 0]$ D. $[-3; 3]$

> **Solution:** D'après la propriété admise du cours, la fonction cube $x \mapsto x^3$ est une fonction convexe sur $[0; +\infty[$, il en est de même pour la fonction g. La fonction dérivée $g'(x) = 3x^2 - 9$ est croissante sur $[0; +\infty[$ donc d'après le cours, la fonction g est convexe sur $[0; +\infty[$. La bonne réponse est la réponse **B**.

Exercice 2

Commun à tous les candidats 5 points

L'Etat du Wyoming, aux Etats-Unis,acceuille chaque année près de 3,5 millions de touristes, notamment venus visiter les parcs nationaux de Yellowstone et du Grand Teton.

92% de ces touristes visitent le parc de Yellowstone ; parmi ceux-là, 60 % visitent aussi le parc du Grand Teton.

Enfin, 6 % des touristes se rendant au Wyoming ne visitent aucun des deux parcs.

On interroge au hazard un touriste s'étant rendu au Wyoming ; on suppose que tous ces touristes ont la même probabilité d'être interrogés.

On note Y l'évènement : "le touriste a visité le parc de Yellowstone" ; $\bar{Y}$ désigne l'évènement contraire de Y.

On note G l'évènement : "le touriste a visité le parc du Grand Teton" ; $\bar{G}$ désigne l'évènement contraire de G.

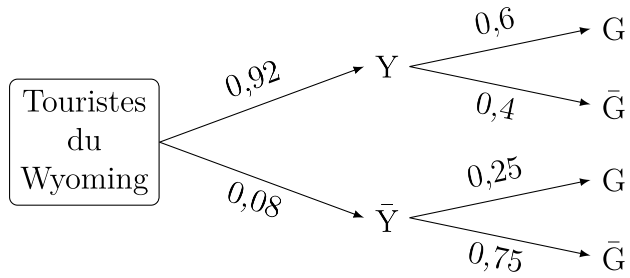
On note $p(A)$ la probabilité d'un évènement A et, si B est un évènement de probabilité non nulle, $p_B(A)$ la probabilité d'un évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.
Si nécessaire, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Que vaut $p(\bar{Y} \cap \bar{G})$ la probabilité de l'évènement "$\bar{Y}$ et $\bar{G}$? 0,5 point

> **Solution:** Traduisons l'énonce en terme de probabilité :
>
> - "92 % de ces touristes visitent le parc de Yellowstone" $\Longrightarrow p(Y) = 0,92$
> - "parmi ceux là, 60% visitent aussi le parc du Grand Teton" $\Longrightarrow p_Y(G) = 0,6$
> - "Enfin, 6% des touristes se rendant au Wyoming ne visitent aucun des deux parcs." $\Longrightarrow p(\bar{Y} \cap \bar{G}) = 0,06$
>
> La probabilité de l'évènement "$\bar{Y}$ et $\bar{G}$ est de 6%.

2. Construire un arbre pondéré décrivant la situation étudiée, en y indiquant les probabilités données par l'énoncé qui correspondent à certaines de ses branches. 0,75 point

> **Solution:** L'arbre pondéré décrivant la situation étudiée est :



3. Calculer $p_{\bar{Y}}(\bar{G})$. 0,75 point

Solution: D'après la définition de la probabilité conditionnelle, on a :

$$p_{\bar{Y}}(\bar{G}) = \frac{p(\bar{Y} \cap \bar{G})}{p(\bar{Y})} = \frac{0,06}{0,08} = 0,75$$

4. Montrer que $p(G) = 0,572$. 0,75 point

Solution: Les évènements Y et $\bar{Y}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales :

$$p(G) = p(Y \cap G) + p(\bar{Y} \cap G) = p_Y(G) \times p(Y) + p_{\bar{Y}}(G) \times p(\bar{Y})$$

$$p(G) = 0,6 \times 0,92 + 0,25 \times 0,08 = 0,572$$

5. Un touriste a visité le parc du Grand Teton. Calculer la probabilité qu'il ait aussi visité le parc de Yellowstone (le résultat sera arrondi à 10^{-3} près). 0,75 point

Solution: On cherche la probabilité qu'un touriste ayant visité le parc du Grand Teton ait aussi visité le parc de Yellowstone. On cherche donc la probabilité conditionnelle $p_G(Y)$.

$$p_G(Y) = \frac{p(Y \cap G)}{p(G)} = \frac{0,552}{0,572} = 0,965$$

6. Le billet d'entrée pour le parc de Yellowstone est de 10 dollars, celui pour le parc du Grand Teton est de 7 dollars.

   a. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de la somme, en dollars, dépensée pour la visite des parcs de Yellowstone et du Grand Teton par un touriste se rendant au Wyoming. 0,75 point

Somme en dollars	0		17
Probabilité			

Solution: En complétant l'arbre pondéré de la question 2 par la dépense en \$, on a le tableau suivant :

Somme en dollars	0	7	10	17
Probabilité	0,06	0,02	0,368	0,552

b. Calculer l'espérance de cette loi et interpréter le résultat. 0,75 point

Solution: Calculons l'espérance.
Par définition de l'espérance :

$$E = 0 \times 0,006 + 7 \times 0,02 + 10 \times 0,368 + 17 \times 0,552 = 13,204$$

La dépense moyenne d'un touriste se rendant dans l'État du Wyoming aux États-Unis, est de 13,204 \$.

Exercice 3
Pour les élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité **5 points**
Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

Le 1^{er} janvier 2000, un client a placé 3000 €(à intérêts composés au taux annuel de 2,5 %).
On note C_n le capital du client au 1^{er} janvier de l'année $2000 + n$, où n est un entier naturel.

1. Calculer C_1 et C_2. Arrondir les résultats au centime d'euro. 0,5 point

Solution:
$$C_1 = 3075e$$
$$C_2 = 3151,88e$$

2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a la relation $C_n = 3000 \times 1,025^n$. 1 point

Solution:
$$C_{n+1} = C_n \times 1,025$$
La suite est géométrique de raison 1,025 et de 1^{er} terme 3000. On a donc :
$$C_n = 3000 \times 1,025^n$$

3. Au 1^{er} janvier 2013, le client avait besoin d'une somme de 5000 €. Montrer que le capital de son placement n'est pas suffisant à cette date. 0,5 point

Solution: Pour répondre à cette question, il nous suffit de calculer C_{13}.
$$C_{13} \simeq 4135 < 5000$$
Le capital du placement du client n'est pas suffisant au 1^{er} janvier 2013.

PARTIE B

On considère la suite (U_n) définie par $U_{n+1} = 0,6U_n + 8$ et $U_0 = 161$.

1. Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 20$. Monter que (V_n) est une suite géométrique. On précisera le premier terme et la raison. 1 point

Solution: $V_n = U_n - 20$
$V_{n+1} = U_{n+1} - 20$ Remplaçons U_{n+1} par $0,6U_n + 8$ $V_{n+1} = 0,6U_n + 8 - 20$
$V_{n+1} = 0,6U_n - 12$ On met 0,6 en facteur :
$V_{n+1} = 0,6 \times (U_n - \frac{12}{0,6})$

$V_{n+1} = 0,6 \times (U_n - 20)$ Remplaçons $U_n - 20$ par V_n :
$V_{n+1} = 0,6V_n$.
On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre 0,6. La suite (V_n) est géométrique de raison $q = 0,6$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 20 = 161 - 20 = 141$.

2. Donner l'expression de V_n en fonction de n, puis l'expression de U_n en fonction de n. 1 point

Solution: La suite (V_n) est géométrique de raison $q = 0,6$ et de premier terme $V_0 = 141$ donc :

$$V_n = V_0 \times q^n = 141 \times 0,6^n$$

On a donc :

$$U_n = V_n + 20 = 141 \times 0,6^n + 20$$

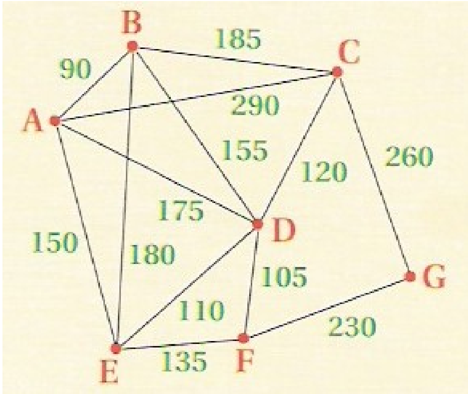
3. Déterminer la limite de la suite (V_n) et en déduire celle de la suite (U_n). 1 point

Solution: On a : $0 < q < 1$ donc $lim_{n\to\infty} 0,6^n = 0$ et ainsi $lim_{n\to\infty}(V_n) = 0$ et $lim_{n\to\infty}(U_n) = 20$.

Exercice 3

Pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points (1 point par question)

Le graphe Γ ci-contre représente le plan d'un zoo. Le sommet A représente son accès. Les sommets B, C, D, E, F et G désignent les différents secteurs animaliers de ce zoo.



Une arête représente l'allée reliant deux secteurs et est pondérée par la distance de parcours, exprimée en mètres, entre ces deux secteurs.

Partie I

Pour mieux visualiser sur le plan les différents secteurs du zoo, on veut les colorier de telle sorte que deux secteurs adjacents ne soient pas de la même couleur.

1. Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires à la réalisation de ce plan ? Justifier la réponse.

Solution: ABDE (par exemple, il y a aussi ABCD) est un sous-graphe complet d'ordre maximal égal à 4 ; il faut donc au minimum 4 couleurs pour réaliser ce plan

2. Proposer une coloration de ce graphe à l'aide d'un algorithme à préciser. Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique de ce graphe ?

Solution: On utilise l'algorithme de coloration de Welsh-Powell.
D'abord, on fait le tableau des degrés des sommets :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	4	4	4	5	4	3	2

Maintenant, on classe les sommets par ordre de degré décroissant. Le classement des sommets de même degré importe peu.

Sommet	D	A	B	C	E	F	G
Degré	5	4	4	4	4	3	2

- *Color : bleu* **D- G**
- *Color : rouge* **A- F**
- *Color : vert* **B**
- *Color : jaune* **C-E**

La coloration n'étant pas forcément optimale, on en déduit que le nombre chromatique χ est tel que $\chi \leq 4$.

3. Déterminer le nombre chromatique de ce graphe et proposer une coloration optimale des différents secteurs du zoo.

Solution: Nous avons vu en question 1 que $\chi \geq 4$ et en question 2 que $\chi \leq 4$, on en déduit donc que $\chi = 4$. Une coloration optimale est celle vue précédemment :

Sommet	D	A	B	C	E	F	G

Partie II

1. Pour nettoyer les allées, les services techniques du zoo utilisent une balayeuse automobile. Est-il possible que cette balayeuse n'emprunte chaque allée qu'une fois et une seule ? Si oui, proposer un tel chemin, sinon justifier votre réponse.

Solution: Le graphe Γ est connexe (la chaîne A-B-C-D-E-F-G passe par tous les sommets du graphe). Il a exactement deux sommets de degré impair (D et F), donc d'après le théorème d'Euler, ce graphe admet une chaîne eulérienne d'extrémités D et F. La balayeuse peut donc emprunter chaque allée une fois et une seule. Appliquons l'algorithme d'Euler au graphe Γ :

Étape 1	• S'il y a deux sommets de degrés impairs, on construit une chaîne quelconque joignant ces deux sommets. • Si tous les sommets sont de degrés pairs, on construit un cycle à partir d'un sommet quelconque. • Dans les deux cas, si toutes les arêtes sont marquées, la chaîne est eulérienne, sinon on passe à l'étape 2.
Étape 2	• On choisit un sommet X de la chaîne précédente et on insère un cycle X…X (donc ne contenant pas deux fois la même arête) ne contenant aucune arête déjà marquée.
Étape 3	• Si toutes les arêtes sont marquées, la chaîne est eulérienne, sinon on recommence l'étape 2.

On peut trouver par exemple : D-E-A-B-E-F-D-B-C-D-A-C-G-F ou D-E-A-D-B-E-F-D-C-B-A-C-G-F.

2. Les services de sécurité basés au point A doivent intervenir dans le secteur G. Déterminer, à l'aide d'un algorithme à préciser, l'itinéraire le plus court.

Solution: On utilise l'algorithme de Moore-Dijkstra.

A	B	C	D	E	F	G
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	90(A)	290(A)	175(A)	150(A)	∞	∞
		275(B)	245(B)	270(B)	∞	∞
		275(B)	175(A)	**150(A)**	∞	∞
		275(B)	260(E)		285(E)	∞
		275(B)	**175(A)**		285(E)	∞
		295(D)			280(D)	∞
		275(B)			280(D)	∞
					280(D)	535(C)
						510(F)

Les services de sécurité arrivent en **G** en partant de **F**. Ils sont arrivés en **F** en partant de **D**. Ils sont arrivés en **D** en partant de **A**.
L'itinéraire le plus court pour aller de A à G est A-D-F-G. La distance parcourue est de 510 m.

Exercice 4

Commun à tous les candidats 6 points

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l(intervalle [0 :6] par $f(x) = 1 - (x+1)e^{-x}$

1. a. Montrer que $f'(x) = xe^{-x}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f. 0,5 point

> **Solution:** Calculons $f'(x)$. Entre $-(x+1)$ et e^{-x}, l'opération est la multiplication. On applique successivement les formules de dérivation : $(uv)' = u'v + v'u$ et $(e^u)' = u' \times e^u$.
>
> $$0 + (-1) \times e^{-x} + ((-1) \times e^{-x}) \times (-(x+1))$$
>
> $$e^{-x} \times (-1 + x + 1) = xe^{-x}$$

b. En déduire les variations de f sur l'intervalle [0 ;6] 1 point

> **Solution:** La fonction exp étant strictement positive sur $[0;6]$ et la fonction x étant positive sur $[0;6]$ alors la fonction f' est positive sur $[0;6]$ et s'annule pour $x = 0$. Nous pouvons faire le tableau de signe et de variations de f' et f sur $[0;6]$.

x	0		6
$f'(x)$		$+$	
			$0,98$
		$\nearrow$	
$f(x)$	0		

2. Démonter que l'équation $f(x) = 0,5$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0;6]$.
Déterminer une valeur arrondie de α à 0,01. 0,75 point

> **Solution:** La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0;6]$, 0,5 étant compris entre $f(0)$ et $f(6)$, l'équation $f(x) = 0,5$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0;6]$.
>
> $$f(\alpha) = 0,5 \Longleftrightarrow 1 - (\alpha + 1)e^{-x} = 0,5$$
>
> $$\alpha \simeq 1,68$$

3. a. Montrer que la fonction F définie sur $[0;6]$ par $F(x) = x + (2+x)e^{-x}$ est une primitive de f sur [0 ;6]. 1 point

Solution: Calculons $F'(x)$.

$$F'(x) = 1 + (1) \times e^{-x} + ((-1)e^{-x} \times (2+x)$$

$$F'(x) = 1 + e^{-x} \times (1 - (2+x))$$

$$F'(x) = 1 + e^{-x} \times (-x - 1)$$

On reconnait $f(x)$: $F'(x) = 1 - (x+1)e^{-x} = f(x)$.
On en conclut que la fonction F est une primitive de f sur $[0; 6]$.

b. Donner la valeur exacte puis arrondie à10^{-3} près de $I = \int_0^6 f(x)dx$. 0,5 point

Solution:

$$I = F(6) - F(0) = (6 + (6+2)e^{-6}) - 2e^{-0} = 6 + 8e^{-6} - 2 = 4 + 8e^{-6} \simeq 4,02$$

Partie B

Une entreprise lance la production de batteries pour véhicules électriques.

Une étude a modélisé le rythme de la production journalière sur les six premiers mois à l'aide de la fonction f définie dans la partie A pour x compris entre 0 et 6.

x représente le nombre de mois (de 30 jours) depuis le lancement du produit et $f(x)$ représente la production journalière de batteries en milliers.

1. Exprimer en mois puis en jours le moment où la production atteindra 0,5 millier soit 500 unités. 0,75 point

Solution: Quand la production journalière atteindra 0,5 millier, alors : $f(x) = 0,5$.
Nous avons résolu cette équation dans le **2.** de la **partie A**. La solution est $x = \alpha = 1,68$. La production atteindra 0,5 millier au bout de 1,68 mois ou 1 mois et 20 jours.

2. Déterminer une valeur arrondie à 10^{-3} de la valeur moyenne, exprimée en milliers, de la production sur les six premiers mois : $\frac{1}{6}\int_0^6 f(x)dx$. 0,5 point

Solution: Nous avons calculé l'intégrale $I = \int_0^6 f(x)dx$ dans le **3.b** de la **partie A** : $I \simeq 4,02$.
La valeur moyenne de la production sur les six premiers mois est : $\frac{I}{6} \simeq 0,67$