Les nombres complexes
Le point de vue algébrique

Construction des nombres complexes

Exercice 1

1) D est le point de coordonnées $(\sqrt{3}\,;\,3)$. Quel est son affixe ?
2) On donne les points A, B, C d'affixes respectives :
$$z_A = \sqrt{3} + i\,, \quad z_B = -\sqrt{3} - i\,, \quad z_C = 2i$$
Calculer le module et un argument pour ces trois affixes. Que peut-on déduire pour les points A, B et C.
3) Placer les points A, B, C et D à la règle et au compas.
4) Quelle est la nature du quadrilatère AOCD. Pourquoi ?
5) Quel est l'affixe du point E tel que ODEB soit un parallélogramme ?

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée.

1) $|z| = 3$ 2) $\text{Re}(z) = -2$ 3) $\text{Im}(z) = 1$

Opérations dans $\mathbb{C}$

Exercice 3

Donner la forme algébrique des complexes suivant :

1) $z = 3 + 2i - 1 + 3i$
2) $z = 6 + i - (2 + 4i)$
3) $z = 12 - 3i - 4 - 5 + 8i$
4) $z = (1 + 2i)(4 + 3i)$
5) $z = (3 - i)(2 + 7i)$
6) $z = (1 + i)^2$
7) $z = (3 + i\sqrt{5})(3 - i\sqrt{5})$
8) $z = (2 - 5i)^2$
9) $z = (1 + i)(2 - 3i)(1 + i)$
10) $z = (2 + i)^2(1 - 2i)$

Exercice 4

Donner la forme algébrique des complexes suivants :

1) $z = \dfrac{1}{1 - i}$
2) $z = \dfrac{1}{2 - i\sqrt{3}}$
3) $z = \dfrac{1}{4 - 3i}$
4) $z = \dfrac{4 - 6i}{3 + 2i}$
5) $z = \dfrac{5 + 15i}{1 + 2i}$
6) $z = \dfrac{1 + 2i}{1 - 2i}$
7) $z = \dfrac{3 - 6i}{3 + i} + \dfrac{4}{3 - i}$
8) $z = \left(\dfrac{4 - 6i}{2 - 3i}\right)\left(\dfrac{1 + 3i}{3 + 2i}\right)$

Résolution d'équation du 1er degré dans $\mathbb{C}$

EXERCICE 5

Résoudre les équations suivantes. Donner la solution sous forme algébrique.

1) $(1+i)z = 3 - i$
2) $2z + 1 - i = iz + 2$
3) $(2z+1-i)(iz+3) = 0$
4) $\dfrac{z+1}{z-1} = 2i$
5) $(iz+1)(z+3i)(z-1+4i) = 0$

EXERCICE 6

Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}^2$:

1) $\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i \\ z - z' = -2 + i \end{cases}$
2) $\begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \\ -z + z' = 1 - 2i \end{cases}$
3) $\begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1 \end{cases}$
4) $\begin{cases} z - z' = i \\ iz + z' = 1 \end{cases}$

Complexe conjugué

EXERCICE 7

Donner la forme algébrique du conjugué $\overline{z}$ des complexes suivants :

1) $z = 3 - 4i$
2) $z = \dfrac{1}{i-1}$
3) $z = \dfrac{3-i}{1+i}$
4) $z = \dfrac{2i+1}{i+2} + \dfrac{1-2i}{2-i}$

EXERCICE 8

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z suivantes :

1) $2\overline{z} = i - 1$
2) $(2z+1-i)(i\,\overline{z}+i-2) = 0$
3) $\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1} = i$

EXERCICE 9

Soit $z = x + iy$ avec x et y réels ; on note Z le nombre complexe : $Z = z - 2\overline{z} + 2$.

1) Calculer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de Z.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z = 0$ d'inconnue z.

EXERCICE 10

Soit $z = x + iy$ avec x et y réels.
À tout complexe z, on associe $Z = 2\,\overline{z} - 2 + 6i$.

1) Calculer en fonction de x et de y, les parties réelle et imaginaire de Z.
2) Existe-t-il des complexes z tels que $Z = z$?

EXERCICE 11

Dans le plan complexe, M est point d'affixe $z = x + iy$, x et y réels.
À tout complexe $z \neq 1$, on associe : $z' = \dfrac{5z-2}{z-1}$

1) Exprimer $z' + \overline{z'}$ en fonction de z et $\overline{z}$.
2) Démontrer que : $z' \in i\,\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad$ M point d'un cercle privé d'un point.

EXERCICE 12

Pour tout complexe $z \neq i$, on pose : $z' = \dfrac{iz-1}{z-i}$. Prouver que :

$$z' \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad |z| = 1$$

EXERCICE 13

Pour tout complexe $z \neq 2$, on pose : $z' = \dfrac{iz}{z-2}$. Prouver que :

$$z' \text{ imaginaire pur} \quad \Leftrightarrow \quad z \text{ réel}$$

Vrai-Faux

EXERCICE 14

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple.

1) Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.
2) Si $z + \dfrac{1}{z} = 0$, alors $z = i$ ou $z = -i$.
3) Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.
4) L'équation $z^3 + z^2 + 1 - i = 0$ admet une solution réelle.

EXERCICE 15

En arithmétique

L'ensemble $\mathbb{Z}[i]$ est l'ensemble des entiers de Gauss c'est à dire les nombres complexes qui peuvent s'écrire sous la forme : $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}[i]$ est stable pour l'addition et le produit, c'est à dire que la somme et le produit de deux entiers de Gauss sont des entiers de Gauss.

Équations du second degré

EXERCICE 16

Résoudre dans $\mathbb{C}$, chacune des équations suivantes.

1) $2z^2 - 6z + 5 = 0$
2) $z^2 - 5z + 9 = 0$
3) $z^2 - 2z + 3 = 0$
4) $z^2 = z + 1$
5) $z^2 + 3 = 0$
6) $z^2 - 2(1+\sqrt{2})z + 2(\sqrt{2}+2) = 0$

EXERCICE 17

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $\dfrac{z-8}{z-3} = z$.

EXERCICE 18

1) Résoudre l'équation (E) : $z^2 - 2\cos\theta\, z + 1 = 0$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.
2) Dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, A et B sont les points ayant pour affixe les solutions de l'équation (E). Quelles sont les valeurs de θ pour lesquelles le triangle OAB est équilatéral ?

EXERCICE 19

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant : $\begin{cases} z_1 z_2 = 5 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases}$

EXERCICE 20

Trouver les complexes p et q tels que l'équation : $z^2 + pz + q = 0$ admette pour solutions les nombres : $1 + 2i$ et $3 - 5i$

EXERCICE 21

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations bicarrées suivantes :

1) $z^4 + 3z^2 + 2 = 0$
2) $z^4 - 32z^2 - 144 = 0$

EXERCICE 22

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 + 2\bar{z} + 1 = 0$

Équations de degré supérieur

EXERCICE 23

Soit l'équation : $z^3 + 3z^2 + z + 3 = 0$

1) Montrer que -3 est une solution de l'équation.
2) Résoudre alors l'équation dans $\mathbb{C}$.

EXERCICE 24

Soit l'équation : $z^3 - 6z^2 + 12z - 7 = 0$

1) Trouver une racine évidente.
2) Résoudre alors l'équation dans $\mathbb{C}$.

EXERCICE 25

Soit l'équation : $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

1) Trouver une racine évidente.
2) Résoudre alors l'équation dans $\mathbb{C}$.

EXERCICE 26

Soit l'équation (E) : $z^3 - 18z + 35 = 0$

1) a) On pose la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 18x + 35$.
Démontrer que l'équation (E) possède au moins une solution réel α.
b) On rappelle la formule de Cardan pour l'équation $x^3 + px + q = 0$.
Déterminer alors α

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

2) a) Factoriser : $z^3 - 18z + 35$.
b) En déduire alors toutes les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

EXERCICE 27

Montrer que tout polynôme à coefficients réels admet un nombre pair de racines complexes non réelles et que ces racines sont conjuguées deux à deux.

EXERCICE 28

On pose pour tout complexe z : $f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$

1) Vérifier que : $f(z) = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = 0$

EXERCICE 29

1) a) Montrer que $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$
b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de : $z^3 - 1 = 0$.
2) On désigne par j le complexe : $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
a) Calculer j^2, j^3, $j^{2\,021}$
b) Calculer $S = 1 + j + j^2 + \cdots + j^{2\,021}$

EXERCICE 30

On considère le polynôme : $P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$

1) Déterminer les réels a et b tels que : $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$
2) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation : $P(z) = 0$

EXERCICE 31

Pour tout complexe z, on considère : $f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261$

1) b est réel. Exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaires de $f(ib)$.
2) En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution.
3) Démontrer qu'il existe deux nombres réels α et β que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe z,

$$f(z) = (z^2 + 9)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

4) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$

Binôme de Newton

EXERCICE 32

1) Remplir le triangle de Pascal jusqu'à l'ordre 7.
2) Proposer un programme Python dont la fonction pascal(n) donne le triangle de Pascal jusqu'à l'ordre n.

EXERCICE 33

1) Développer $(1-i)^4$
2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a la quantité $(a-i)^3$ est :

   a) Un nombre réel ?
   b) Un imaginaire pur

EXERCICE 34

Somme des parties d'un ensemble de n éléments

En utilisant le binôme de Newton, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

EXERCICE 35

1) Déterminer les racines 4-ième de l'unité.
2) Développer à l'aide de la formule du binôme : $(1-2i)^4$.
3) En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^4 = -7 + 24i$