Devoir de mathématiques

À rendre le jeudi 5 novembre 2020

Exercice 1

Forme algébrique **(4 points)**

Écrire les complexes suivants sous forme algébrique :

1) $z = \left(\dfrac{1}{1-i}\right)^2$

2) $z = 2 + \dfrac{3+10i}{4-4i}$

3) $z = \dfrac{2}{3-2i} + \dfrac{5i}{2-i}$

4) $z = \dfrac{1-i}{3+i} + \dfrac{2}{1-i}$

Exercice 2

Ensemble de points **(3 points)**

Pour tout complexe $z \neq -1$, on pose : $Z = \dfrac{z+1}{\overline{z}+1}$.

Déterminer l'ensemble des point M(z) tel que :

1) le nombre Z soit réel.

2) le nombre Z soit imaginaire pur.

3) Tracer ces deux ensembles de points dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 3

Équation dans $\mathbb{C}$ **(4 points)**

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$. On donnera la solution sous forme algébrique.

1) $-2iz = 3z + 1$

2) $\dfrac{z-i}{z-(2-i)} = 3$

3) $z^2 - 4z + 8 = 0$

4) $\dfrac{3+z}{3-z} = z$

Exercice 4

Équation du second degré à coefficients complexes **(2 points)**

Soit l'équation (E) : $z^2 + 2iz - 2 = 0$

1) Développer $(z+i)^2$.

2) En déduire que l'équation (E) est équivalente à : $(z+i)^2 - 1 = 0$

3) Déterminer alors les solutions de (E).

Exercice 5

Factorisation d'un polynôme **(3 points)**

On considère l'équation (E) : $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$.

1) Donner une solution évidente de (E).
2) Déterminer a et b tels que : $z^4 + 2z^3 - z - 2 = (z^2 + az + b)(z^2 + az + 1)$.
3) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6

Suite dans $\mathbb{C}$ **(4 points)**

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie dans $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{3}z_n + \dfrac{2}{3}i \end{cases}$

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = z_n - i$.

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de (u_n).
2) Déterminer u_n puis z_n en fonction de n.
3) Déterminer $|u_n|$ puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n|$.
4) Soit les points $\mathrm{A}(i)$ et $\mathrm{M}_n(z_n)$. Que représente $|u_n|$ pour les points A et M_n ?
   Conjecturer la position du point M_n lorsque n est grand.