Contrôle de mathématiques

Jeudi 25 novembre 2020

Exercice 1

Équation **(3 points)**

Soit $f(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$ avec $z \in \mathbb{C}$.

1) Montrer que : $f(z) = (z^2 - 4z + 13)(z^2 - 2z + 2)$
2) Résoudre alors $f(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2

Ensemble de points **(4 points)**

1) Déterminer puis représenter les ensembles des point $\mathrm{M}(z)$ tels que :
(unité graphique 1cm sur les deux axes)

a) $|z - 2i| = 3$ b) $|z - 3 - 4i| = |z + 2 + i|$

2) Pour tout complexe $z \neq i$, on pose $Z = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z} + i}$

Déterminer l'ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ tel que Z soit réel.

Exercice 3

Formes d'un nombre complexe **(5 points)**

Soit deux nombres complexes z_1 et z_2 tels que : $z_1 = 4\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$

1) Déterminer la forme algébrique de z_1.
2) Déterminer les formes trigonométrique et exponentielle de z_2
3) En déduire les formes algébrique et exponentielle de $\dfrac{z_1}{z_2}$
4) En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$
5) Deux modèles m_1 et m_2 de calculatrice donnent :

$$m_1 \;:\; \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \qquad \text{et} \qquad m_2 \;:\; \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Est-ce contradictoire ?

Exercice 4

Suite de nombres complexes **(8 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par :

$$z_0 = 0 \text{ et pour tout entier naturel } n \;:\; z_{n+1} = (1+i)z_n - i.$$

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n et B le point d'affixe $z_{\mathrm{B}} = 1$.

1) a) Montrer que $z_1 = -i$ et que $z_2 = 1 - 2i$ puis calculer z_3.

   b) Placer les points B, A_1, A_2 et A_3 dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
   (unité graphique 1 cm sur les deux axes)

   c) Calculer $\dfrac{z_2 - z_1}{z_B - z_1}$. Quelle est la nature du triangle BA_1A_2. Justifier.

2) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n - 1|$.

   a) Démontrer que la suite u_n est géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

   b) Déterminer à partir de quel entier naturel n, la distance BA_n est strictement supérieure à 1 000. On détaillera la démarche choisie.

3) a) Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $1 + i$.

   b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $z_n = 1 - \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

   c) Le point A_{2020} appartient-il à l'axe des abscisses ? Justifier.