

# Devoir de MATHÉMATIQUES

À rendre le jeudi 4 mars 2021

## EXERCICE 1

### Algorithme pour le calcul du pgcd

(3 points)

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls tels que  $a > b$ .

- 1) Démontrer que  $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a - b, b)$ .
- 2) Calculer le  $\text{pgcd}(308, 165)$  par soustractions successives autant de fois que nécessaire. Quelle est la condition pour que le processus s'arrête ?
- 3) Recopier et compléter la fonction  $\text{pgcd}(a, b)$  en Python  suivante pour qu'elle renvoie le  $\text{pgcd}(a, b)$ , par cette méthode,  $a$  et  $b$  n'étant pas nécessairement ordonnés :

```
def pgcd(a, b):
    while .....:
        ...
        ...
        ...
    return .....
```

## EXERCICE 2

### Restes dans l'algorithme d'Euclide

(2 points)

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls tels que :  $\text{pgcd}(a, b) = 15$ .

La dernière division de reste nul étant écrite, les quotients successifs de l'algorithme d'Euclide sont : 2 ; 4 ; 1 ; 3 ; 2.

Quelles sont les valeurs de  $a$  et  $b$  ?

## EXERCICE 3

### Nombres premiers entre eux

(3 points)

- 1) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , les entiers  $(11n + 3)$  et  $(7n + 2)$  sont premiers entre eux. En déduire  $\text{pgcd}(135; 86)$ .
- 2) Montrer que la fraction  $\frac{2n + 1}{n(n + 1)}$  est irréductible pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## EXERCICE 4

### Rationalité

(3 points)

Soit  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  premiers entre eux.

Soit  $f$  le polynôme défini sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 5x + 3$ .

- 1) Montrer que si la fraction  $\frac{p}{q}$  est une racine de  $f$  alors  $p$  divise 3 et  $q$  divise 2.
- 2) En déduire que  $f$  admet qu'une solution rationnelle.

### EXERCICE 5

#### Équation diophantienne

(3,5 points)

- 1) On considère l'équation (E) à résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  :  $7x - 5y = 1$ .
  - a) Déterminer une solution particulière de l'équation (E).
  - b) Déterminer l'ensemble des couples de  $\mathbb{Z}^2$ , solutions de (E).
- 2) Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons il y a  $x$  jetons rouges et  $y$  jetons verts. Sachant que  $7x - 5y = 1$ , quels peuvent être les nombres de jetons rouges, verts et blancs ?

### EXERCICE 6

#### Sabliers

(3 points)

- 1) Lisa veut mesurer une durée de 2 minutes avec deux sabliers, l'un mesurant une durée de 11 minutes et l'autre une durée de 5 minutes. Expliquer comment Lisa doit procéder.
- 2) Est-il possible pour Lisa de mesurer toute durée entière de  $d$  minutes avec ces deux sabliers ?



### EXERCICE 7

#### PGCD et suite

(2,5 points)

Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par : 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 4u_n + 1 \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1}$  et  $u_n$  sont premiers entre eux.
- 2) On pose pour  $n \in \mathbb{N}$  :  $v_n = u_n + \frac{1}{3}$ .
  - a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique.
  - b) En déduire l'expression de  $v_n$  puis celle de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- 3) Calculer  $\text{pgcd}(4^{n+1} - 1, 4^n - 1)$ .