Devoir de mathématiques

À rendre le jeudi 18 novembre 2021

EXERCICE 1

Forme algébrique **(2 points)**

Mettre les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

1) $z_1 = \dfrac{1}{5+9i}$

2) $z_2 = \dfrac{2-3i}{8+6i}$

EXERCICE 2

Équations du premier degré **(4 points)**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes en donnant la solution sous forme algébrique :

1) $-2z + 3 = iz + 1 - i$

2) $(3+5i)\,z = 1 - z$

3) $2z - 2i\,\bar{z} = -5 - i$

4) $iz + \bar{z} - 3 = 7 - \bar{z} + 5i$

EXERCICE 3

Équations du second degré **(3 points)**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes en donnant les solutions sous forme algébrique :

1) $2z^2 - 6z + 5 = 0$

2) $z^2 + 2\,\bar{z} + 1 = 0$

EXERCICE 4

Équations du troisième degré à coefficients complexes **(4 points)**

Soit l'équation (E) dans $\mathbb{C}$: $z^3 - (1-i)z^2 + (1-i)z + i = 0$

1) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution imaginaire pure.
On pourra poser $z = ki$ avec $k \in \mathbb{R}$.

2) En déduire une factorisation de (E) puis résoudre l'équation (E).

EXERCICE 5

Ensemble de points **(4 points)**

Pour tout complexes $z \neq i$, on pose $z' = \dfrac{iz}{z-i}$.

1) Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M(z) pour que z' soit réel.

2) Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M(z) pour que z' soit un imaginaire pur ;

3) Tracer ces deux ensembles Γ_1 et Γ_2 dans le plan complexe de repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

EXERCICE 6

Équations du deuxième degré à coefficients complexes **(3 points)**

Soit l'équation (E) : $z^2 + 10z + 25 - 16i = 0$

1) Soit $a = 2\sqrt{2}(1 + i)$. Déterminer la forme algébrique de a^2.

2) En déduire alors les solutions de l'équation (E)