Contrôle de mathématiques

Jeudi 09 décembre 2021

EXERCICE 1

Équation **(3 points)**

On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z^3 - (4\sqrt{3} + i)z^2 + 4(4 + i\sqrt{3})z - 16i$.

1) Montrer que $f(i) = 0$. Que peut-on en déduire pour $f(z)$?

2) a) Montrer que : $f(z) = (z - i)(z^2 - 4z\sqrt{3} + 16)$

   b) En déduire les 3 solutions de l'équation $f(z) = 0$.

EXERCICE 2

Ensemble de points **(4 points)**

1) Déterminer puis représenter les ensembles des point M(z) tels que :
   (unité graphique 1cm sur les deux axes)

   a) $|z - 4| = 3$

   b) $|z - 2 + 3i| = |z + 1 - 6i|$

2) Pour tout complexe $z \neq i$, on pose $z' = \dfrac{z - 1 + 2i}{z - i}$

   Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que $|z'| = 1$.

EXERCICE 3

Formes d'un nombre complexe **(5 points)**

1) a) Déterminer la forme exponentielle du complexe : $-1 + i\sqrt{3}$.

   b) En déduire que $(-1 + i\sqrt{3})^6 = 64$

2) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le complexe $z_n = (2 - 2i)^n$ est-il un imaginaire pur ?

3) Soit les points A$(1 + 4i)$, B$(3 + i)$ et C$(-2 + 2i)$

   a) Faire une figure.

   b) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

EXERCICE 4

Suite de nombres complexes **(8 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n \ : \ z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n.$$

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.

1) a) Déterminer la forme exponentielle de $\left(1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

b) En déduire la forme exponentielle de z_1 et z_2.

2) a) Montrer que $z_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$.

b) Pour quelle valeur de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés.

3) Pour tout entier n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$

a) Interpréter géométriquement d_n

b) Calculer d_0.

c) Calculer d_{n+1} en fonction de d_n. En déduire que la suite (d_n) est géométrique dont on donnera la raison. Exprimer alors d_n en fonction de n.

4) a) Calculer $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_n}$.

b) En déduire que le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est rectangle en A_n.

5) On veut déterminer le plus petit entier n tel que $|z_n| > 10$

a) Compléter le programme en Python suivant.

b) Déterminer cet entier à l'aide de ce programme.

```
from math import*
n=0
u=......
while ...... :
    n=......
    u=......
print(...)
```