

Contrôle de mathématiques

Jeudi 07 Avril 2022

EXERCICE 1

Algorithme d'Euclide et pgcd

(6 points)

- 1) Déterminer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide : $\text{pgcd}(6\,157, 1\,645)$.
- 2) Soit n un entier naturel. On pose $a = 5n^2 + 4n$ et $b = 4n^2 + 3n$.
 - a) Montrer que les entiers $(5n + 4)$ et $(4n + 3)$ sont premiers entre eux.
 - b) En déduire $\text{pgcd}(a, b)$.
- 3) Soit n un entier relatif. On pose $a = 3n + 11$ et $b = n + 6$.
 - a) Montrer que $\text{pgcd}(a, b)$ est un diviseur de 7.
En déduire les valeurs possibles de $\text{pgcd}(a, b)$.
 - b) Déterminer les valeurs de n pour que $\text{pgcd}(a, b) = 7$.

EXERCICE 2

Équation diophantienne

(7 points)

- 1) a) Montrer par l'algorithme d'Euclide que 47 et 43 sont premiers entre eux.
b) En « remontant » l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers naturels u et v tels que $47u - 43v = 1$.
- 2) Soit l'équation (E) : $47x - 43y = 7$ avec $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
 - a) Pourquoi sans calcul peut-on affirmer que l'équation (E) admet des solutions ?
On citera le théorème utilisé.
 - b) En utilisant la question 1b), déterminer une solution particulière de (E).
 - c) Déterminer toutes les solutions de (E) dans \mathbb{Z}^2 .
 - d) Déduire le couple, d'entiers naturels les plus petits, solution de (E).
- 3) À l'aide de la question 2), déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

$$\begin{cases} n \equiv 12 \pmod{43} \\ n \equiv 5 \pmod{47} \end{cases}$$

EXERCICE 3

Codage

(7 points)

À chaque lettre de l'alphabet, on associe un entier n comme indiqué ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante.

- On choisit deux entiers naturels a et b compris entre 0 et 25.
- À la lettre à coder, on associe l'entier x correspondant dans le tableau.

- On calcule l'entier y défini par les relations : $y \equiv ax + b \pmod{26}$ et $0 \leq y \leq 25$.
 - À l'entier y , on associe la lettre correspondante dans le tableau.
- 1) Dans cette question, on choisit $a = 3$ et $b = 11$.
 - a) Montrer que la lettre G est codée par la lettre D. Comment est codée la lettre S ?
 - b) Démontrer que : $y \equiv 3x + 11 \pmod{26} \Leftrightarrow x \equiv 9y + 5 \pmod{26}$.
 - c) En déduire le décodage du mot : VBUTSB
 - 2) Dans cette question, on ne connaît pas les entiers a et b , mais on sait que la lettre E est codée par la lettre I et la lettre V est codée par la lettre T
 - a) Montrer que $17a \equiv 11 \pmod{26}$.
 - b) En remarquant que $17 \equiv -9 \pmod{26}$ déterminer la valeur de a .
 - c) En déduire la valeur de b .