Contrôle de mathématiques

Jeudi 12 octobre 2023

EXERCICE 1

QCM **(4 points)**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des quatre questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit $z = (3 - i)(5 + 3i)$. La partie imaginaire du nombre complexe $\overline{z}$ est :

a) -4 **b)** 4 **c)** $4i$ **d)** $-5i$

2) La forme algébrique de l'inverse du nombre complexe $a = 2 - 3i$ est

a) $a = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}i$ **b)** $a = -\dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{5}i$ **c)** $a = \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{5}i$ **d)** $a = \dfrac{2}{13} + \dfrac{3}{13}i$

3) Soit le polynôme P tel que $P(z) = z^3 - 2z^2 + 2z$. Alors $P(2i) =$

a) $2 - 6i$ **b)** $2 + 12i$ **c)** $8 + 12i$ **d)** $8 - 4i$

4) L'équation $(-4 + 3i)\,z = 4 + 2i$ a pour solution

a) $z = -\dfrac{24}{25} - \dfrac{4}{5}i$ **b)** $z = \dfrac{24}{25} + \dfrac{4}{5}i$ **c)** $z = -\dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5}i$ **d)** $z = \dfrac{2}{5} + \dfrac{4}{25}i$

EXERCICE 2

Forme algébrique **(2 points)**

Mettre les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

1) $z_1 = \dfrac{4 + 3i}{1 + 2i}$

2) $z_2 = \dfrac{(2 - 5i)(1 - 3i)}{-1 + i}$

EXERCICE 3

Équations du premier degré **(3 points)**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes en donnant la solution sous forme algébrique :

1) $(2 + 4i)(z - 2i) = 1$

2) $(3 + 2i)\,z + (1 - 5i)\,\overline{z} = -19 - 2i$, on pourra poser $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 4

Équations du second degré **(3 points)**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes en donnant les solutions sous forme algébrique :

1) $2z^2 + 11z + 16 = 0$

2) $z^2 - 4\,\overline{z} - 5 = 0$, on pourra poser $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$

EXERCICE 5

Ensemble de points **(5 points)**

Pour tout complexes $z \neq 1$, on pose $z' = \dfrac{z+2i}{z-1}$.

Soit le point A d'affixe 1. On pourra poser $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

1) Montrer que l'ensemble E_1 des points M(z) pour que z' soit réel est une droite privée d'un point dont on déterminera une équation.
2) Montrer que l'ensemble E_2 des points M(z) pour que z' soit un imaginaire pur est un cercle privé d'un point dont on déterminera le centre et le rayon.
3) Tracer ces deux ensembles E_1 et E_2 dans le plan complexe de repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

EXERCICE 6

Racines d'un polynôme **(3 points)**

Soit le polynôme $P(z)$ tel que : $P(z) = z^4 + 16$

1) Déterminer le réel positif b tel que $P(z) = (z^2 + bz + 4)(z^2 - bz + 4)$
2) En déduire dans $\mathbb{C}$ les solutions de $P(z) = 0$