

Contrôle de mathématiques

Jeudi 07 décembre 2023

EXERCICE 1

QCM

(5 points)

Pour chacune des quatre questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

- Soit z un nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{3\pi}{4}$.
L'écriture algébrique de z est :
 a) $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ b) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ c) $z = 2 - 2i$ d) $z = -2 + 2i$
 - Soit $z = -1 + i\sqrt{3}$. La forme exponentielle de z est :
 a) $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ b) $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ c) $z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ d) $z = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
 - Soit les points A, B C dont les affixes sont les solutions de $(z - 1)(z^2 + 6z + 25) = 0$.
Le triangle ABC est :
 a) équilatéral c) rectangle isocèle
 b) rectangle non isocèle d) ni rectangle ni équilatéral
- Pour 4) et 5), dans le plan complexe d'origine O, soit les points A(1), B(i), C(-1) et D(-i).
- L'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z + i| = |z - 1|$ est :
 a) la médiatrice du segment [AB] c) le cercle de centre O de rayon 1
 b) le milieu du segment [BC] d) la médiatrice du segment [AD]
 - L'ensemble des points $M(z)$ tels que $\frac{z + i}{z + 1}$ soit réel est :
 a) la droite (CD) privé de C c) le cercle de diamètre [BD] privé de C
 b) le cercle de diamètre [CD] privé de C d) la médiatrice du segment [AB]

EXERCICE 2

Ensemble de points

(3 points)

On pose A(1 + 4i), B(-3 + 2i) et C(1 + i).

- Déterminer l'ensemble E_1 des points $M(z)$ tels que : $|z - 1 - 4i| = |z + 3 - 2i|$.
- Déterminer l'ensemble E_2 des points $M(z)$ tels que : $|(1 + i)z - 2i| = 2$.
 💡 on pourra mettre (1 + i) en facteur dans le premier terme.
- Représenter les ensembles E_1 et E_2 dans le plan complexe d'unité 1 cm.

EXERCICE 3

Argument d'un nombre complexe

(5 points)

- 1) a) Déterminer la forme exponentielle de $z_1 = -\sqrt{3} + i$.
En déduire un argument de $(-\sqrt{3} + i)^8$.
b) Montrer que $z_2 = (1 + i\sqrt{3})^6$ est un nombre réel.
- 2) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le complexe $z_n = (3 - i\sqrt{3})^n$ est-il un imaginaire pur ?
- 3) Soit les points $A\left(\frac{3}{2} + 3i\right)$, $B(1 + i)$ et $C(-3i)$.
Montrer que les points A, B et C sont alignés.

EXERCICE 4

Triangles

(8 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) d'unité graphique 2cm.

On considère les points $A(1)$ et $B(i)$.

À tout point $M(z)$ on associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = -iz$.

On désigne par $I(z_I)$ le milieu de segment $[AM]$.

- 1) On prend $z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
 - a) Déterminer la forme algébrique de z .
 - b) Montrer que $z' = -\sqrt{3} - i$. En déduire le module et un argument de z' .
 - c) Dans le plan complexe, placer les points A, B, M, M' et I.
 - d) Montrer que $\frac{z_B - z'}{z_I} = 2i$.
Que représente la droite (OI) pour le triangle OAM ? Et pour le triangle OBM' ?
- 2) On prend maintenant $z = x + iy$.
 - a) Déterminer l'affixe z_I du point I en fonction de x et y .
 - b) Déterminer l'affixe z' du point M' en fonction de x et y .
 - c) Calculer $\frac{z_B - z'}{z_I}$.
 - d) Conclure sur la droite (OI).