Inégalités

Encadrer - Majorer - Minorer

Inverse, carré et racine

- La fonction inverse, renverse l'inégalité :

$$x \text{ et } y \text{ de même signe} \quad x < y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$$

- La fonction carrée
  - — conserve l'égalité des nombres positifs :

$$0 < x < y \quad \Rightarrow \quad 0 < x^2 < y^2$$

  - — et renverse l'inégalité des nombres négatifs :

$$x < y < 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 > y^2 > 0$$

- La fonction racine conserve l'inégalité :

$$\forall x, y \geqslant 0, \quad x < y \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} < \sqrt{y}$$

Fonction monotone

Soit f une fonction monotone que un intervalle I

- f croissante sur I : conserve l'inégalité

$$\forall x, y \in \mathrm{I}, \quad x < y \quad \stackrel{f\nearrow}{\Rightarrow} \quad f(x) < f(y)$$

- f décroissante sur I : renverse l'inégalité

$$\forall x, y \in \mathrm{I}, \quad x < y \quad \stackrel{f\searrow}{\Rightarrow} \quad f(x) > f(y)$$

Somme et produit

- On peut ajouter membre à membre deux inégalités :

$$\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow \quad a + c < b + d$$

- On peut multiplier membre à membre deux inégalités si les termes sont positifs :

$$\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow \quad ac < bd$$

Inchangée par addition d'un réel

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad x < y \quad \Rightarrow \quad x + a < y + a$$

Inchangée ou renversée par multiplication d'un réel

$$k > 0, \quad x < y \quad \Leftrightarrow \quad kx < ky$$
$$k < 0, \quad x < y \quad \Leftrightarrow \quad kx > ky$$

Majorer et minorer

- Soit $x \in]3, 5[$, majorer $\dfrac{1}{3 - x}$

$$\begin{aligned} 3 < x < 5 \quad &\stackrel{\times(-1)}{\Rightarrow} \quad -5 < -x < -3 \\ &\stackrel{+3}{\Rightarrow} \quad -2 < 3 - x < 0 \\ &\stackrel{x^{-1}}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{3 - x} < -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

- $x > 1$, montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ est minoré par $\dfrac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} 0 < x^2 - 1 < x^2 \quad &\stackrel{\sqrt{}}{\Rightarrow} \quad \sqrt{x^2 - 1} < x \\ &\stackrel{x^{-1}}{\Rightarrow} \quad \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} > \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Méthode importante

Pour comparer les quantités A et B, il est plus facile d'étudier le signe de $A - B$.

Montrer que : Si $x < 1$ alors $\dfrac{x - 8}{2x - 9} < 1$

- On calcule : $\dfrac{x - 8}{2x - 9} - 1 = \dfrac{1 - x}{2x - 9}$
- Si $x < 1$ alors $1 - x > 0$ et $2x - 9 < -7 < 0$.
- Donc $\dfrac{1 - x}{2x - 9} < 0$ et donc $\dfrac{x - 8}{2x - 9} < 1$

Encadrement de la différence et du quotient

- Encadrer $(x - y)$: on encadre $-y$, puis on somme :

$$\begin{cases} -2 < x < 3 \\ -4 < y < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < x < 3 \\ 1 < -y < 4 \end{cases} \stackrel{\Sigma}{\Rightarrow} \quad -1 < x - y < 7$$

- Encadrer $\dfrac{x}{y}$: on vérifie que x et y ont même signe, on encadre l'inverse $\dfrac{1}{y}$ puis on multiplie.

$$\begin{cases} 8 < x < 9 \\ 3 < y < 4 \end{cases} \stackrel{y^{-1}}{\Rightarrow} \begin{cases} 8 < x < 9 \\ \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{3} \end{cases} \stackrel{\Pi}{\Rightarrow} \quad 2 < \frac{x}{y} < 3$$