# ROC : Restitution organisées des connaissances

Les démonstrations suivantes sont à connaître. Les raisonnements mis en œuvre peuvent être demandés dans un contexte légèrement différent. En particulier en ce qui concerne les suites récurrentes.
Bien lire les pré-requis dans les questions ROC, on peut demander une autre démonstration que celle vue en cours.

## Table des matières

# 1 Suites

## 1.1 Somme des termes d'une suite géométrique

**Théorème 1 :** Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme $u_0$. La somme $S_n$ des $(n+1)$ premier termes est égale à :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

**Démonstration :** on a :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= u_0 + (q \times u_0) + (q^2 \times u_0) + \cdots + (q^n \times u_0) \\ &= u_0(1 + q + q^2 + \cdots + q^n) \end{aligned}$$

On pose : $A_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n$

En soustrayant les deux lignes suivantes, on obtient :

$$\begin{array}{rl} A_n = & 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n \\ q \times A_n = & \phantom{1 +{}} q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n + q^{n+1} \\ \hline A_n - q \times A_n = & 1 - q^{n+1} \end{array}$$

On obtient alors : $A_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

**Conclusion :** On a donc $S_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

## 1.2 Inégalité de Bernoulli

**Théorème 2 :** $\forall a \in [0;+\infty], \quad (1+a)^n \geqslant 1+na$

**Démonstration :** Par récurrence

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $(1+a)^0 \geqslant 1+0a$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+$.
- Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie donc :

$$(1+a)^n \geqslant 1+na$$

Or, $1+a > 0$, donc en multipliant l'inégalité ci-dessus par $(1+a)$, on obtient :

$$(1+a)^{n+1} \geqslant (1+na)(1+a)$$

Or

$$(1+na)(1+a) = 1+a+na+na^2 = 1+(n+1)a+na^2$$

et comme $\quad na^2 \geqslant 0$ :

$$(1+na)(1+a) \geqslant 1+(n+1)a$$

D'où

$$(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.

**Conclusion** : on a :

$$\begin{cases} \mathcal{P}(0) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{cases}$$

Donc : $\forall a \in [0;+\infty], \quad (1+a)^n \geqslant 1+na$

## 1.3 Théorèmes de comparaison

**Théorème 3 :** Soit trois suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$. Si à partir d'un certain rang, on a :

1) **Théorème d'encadrement ou "des gendarmes"**

   $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

2) **Théorème de comparaison**

   - $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
   - $u_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Pré-requis : Définition de la limite infinie d'une suite

Démonstration : Seule la preuve du théorème de comparaison en $+\infty$ est exigible.

On sait que : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, donc pour tout réel $A$, il existe un entier $N$ tel que si $n > N$ alors $v_n \in ]A; +\infty[$

Comme $u_n > v_n$ à partir du rang $p$ donc si $n > \max(N, p)$ alors $u_n \in ]A; +\infty[$

On a donc bien : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

## 1.4 Limite d'une suite géométrique

**Théorème 4 :** Soit $q$ un réel. On a les limites suivantes :

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q \leqslant -1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ n'existe pas

**Pré-requis :** Inégalité de Bernoulli et théorème de comparaison en $+\infty$

**Démonstration :** Seule la preuve de la première limite est exigible

D'après l'inégalité de Bernoulli, on a :

$$\forall a > 0 \quad (1+a)^n \geqslant 1 + na$$

On pose $q = 1 + a$ donc si $a > 0$ on a $q > 1$. L'inégalité devient :

$$q^n \geqslant 1 + na$$

Comme $a > 0$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$

D'après le théorème de comparaison on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

**Remarque :** Pour démontrer la deuxième limite, on peut poser $Q = \dfrac{1}{|q|}$, avec $0 < |q| < 1$ donc $Q > 1$ . On revient alors à la première limite et l'on conclut avec le quotient sur les limites.

## 1.5 Suite croissante non majorée

**Théorème 5 : Divergence**

- Si une suite $(u_n)$ est **croissante et non majorée** alors la suite $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.
- Si une suite $(u_n)$ est **décroissante et non minorée** alors la suite $(u_n)$ diverge vers $-\infty$.

Pré-requis : Définition d'une suite non majorée.

Démonstration : Seule la preuve de la première propriété est exigible. Soit donc une suite $(u_n)$ croissante et non majorée.

$(u_n)$ n'est pas majorée, donc pour tout intervalle $]A;+\infty[$,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que :} \quad u_N \in ]A;+\infty[$$

Comme $(u_n)$ est croissante, on a :

$$\forall n > N \quad \text{alors} \quad u_n > u_N$$

Donc :

$$\forall n > N \quad \text{alors} \quad u_n \in ]A;+\infty[$$

donc à partir d'un certain rang tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]A;+\infty[$. La suite $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.

# 2 Analyse

## 2.1 Unicité de la fonction exponentielle

**Théorème 6 :** Il existe une unique fonction $f$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

On nomme cette fonction exponentielle et on la note : exp

**Démonstration :** L'existence de cette fonction est admise.
Démontrons l'unicité.

- **La fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.**

  Soit la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = f(x)f(-x)$.
  Montrons que la fonction $\varphi$ est constante. Pour cela dérivons $\varphi$.

  $$\varphi'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$$

  Comme $f' = f$, on a :

  $$\begin{aligned} &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Comme $\varphi' = 0$ alors la fonction $\varphi$ est constante. Donc :

  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \varphi(0) = f^2(0) = 1$$

  On en déduit alors : $f(x)f(-x) = 1$, donc la fonction $f$ ne peut s'annuler.

- **Unicité**

  On suppose que deux fonctions $f$ et $g$ vérifient les conditions du théorème, soit $f = f'$, $g' = g$ et $f(0) = g(0) = 1$. La fonction $g$ ne s'annule donc pas, on définit alors sur $\mathbb{R}$ la fonction $h$ par $h = \dfrac{f}{g}$. On dérive $h$ :

  $$h' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{fg - fg}{g^2} = 0$$

  La fonction $h$ est donc constante et $h(x) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = 1$

  On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1.$

  On en déduit que $f = g$. L'unicité est ainsi prouvé.

## 2.2 Relation fonctionnelle de l'exponentielle

**Théorème 7 :** Soit $a$ et $b$ deux réels, on a alors :

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

**Remarque :** Cette relation s'appelle la relation fonctionnelle car on pourrait définir l'exponentielle à partir de cette propriété pour retrouver que l'exponentielle est égale à sa dérivée.

**Démonstration :** Posons la fonction $h(x) = \dfrac{\exp(x+a)}{\exp(a)}$.
Montrons alors que la fonction $h$ n'est autre que la fonction exponentielle. Il suffit alors de Montrer que $h' = h$ et $h(0) = 1$ :

$$h'(x) = \frac{\exp'(x+a)}{\exp(a)} = \frac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = h(x)$$

$$h(0) = \frac{\exp(0+a)}{\exp(a)} = 1$$

La fonction $h$ est donc la fonction exponentielle. On en déduit alors :

$$\frac{\exp(x+a)}{\exp(a)} = \exp(x) \quad \Leftrightarrow \quad \exp(x+a) = \exp(x) \times \exp(a)$$

## 2.3 Limites en l'infini de l'exponentielle

**Théorème 8 :** On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

**Démonstration :** Soit la fonction $f$ suivante : $f(x) = e^x - x$.

Dérivons la fonction $f$ : $f'(x) = e^x - 1$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, on a :

$$f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; x > 0 \quad \text{et} \quad f'(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; x < 0$$

On obtient alors le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | |

Du tableau de variation on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0 \quad \text{donc} \quad e^x > x$

or on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ par comparaison on a :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

En faisant le changement de variable $X = -x$, on obtient :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$$

## 2.4 Limites de référence de l'exponentielle

**Théorème 9 :** On a : $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

**Démonstration :** La démonstration découle de la définition de la dérivée en 0 appliquée à la fonction $e^x$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$$

**Théorème 10 :** **Croissance comparée**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

**Démonstration :** Comme pour la limite de $e^x$ en $+\infty$, on étudie les variation d'une fonction. Soit donc la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$$

On calcule la dérivée $g'$ : $g'(x) = e^x - x$

D'après le paragraphe 2.3, on a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > x \quad \text{donc} \quad g'(x) > 0$

La fonction $g$ est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
Or $g(0) = 1$ donc si $x > 0$ alors $g(x) > 0$. On en déduit donc que :

$$x > 0 \quad g(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x > \frac{x^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$$

On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, par comparaison, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Pour la deuxième limite, on fait un changement de variable $X = -x$, on obtient alors :

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{X \to +\infty} (-X)e^{-X} = -\lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$$

**Conséquence** : la fonction exponentielle « l'emporte » sur la fonction $x$.

## 2.5 Logarithme du produit

**Théorème 11 :** Pour tous réels strictement positifs $a$ et $b$, on a :

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

**Démonstration :** D'après les propriétés de l'exponentielle, on a :

$$e^a = e^b \quad \Leftrightarrow \quad a = b$$

Or $\quad e^{\ln ab} = ab \quad$ et $\quad e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab$

On conclut donc que $\quad \ln ab = \ln a + \ln b$.

**Remarque :** C'est cette propriété qui est à l'origine de la fonction logarithme.

## 2.6 Limites de la fonction logarithme en 0 et en l'infini

**Théorème 12 :** On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

**Démonstration :**

- Pour montrer la limite en $+\infty$, on revient à la définition :

  Pour tout $M > 0$, si $\ln x > M$ alors, comme la fonction exp est croissante, $x > e^M$.

  Il existe donc un réel $A = e^M$ tel que si $x > A$ alors $\ln x > M$.

  Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

- Pour la deuxième limite, on fait un changement de variable. On pose $X = \dfrac{1}{x}$. Donc si $x \to 0^+$ alors $X \to +\infty$. On a alors :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{X \to +\infty} \ln \frac{1}{X} = \lim_{X \to +\infty} -\ln X = -\infty$$

## 2.7 Croissance comparée

**Théorème 13 : Croissance comparée**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$$

**Pré-requis :** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

**Démonstration :**

- Pour la premère limite, on fait un changement de variable. On pose : $X = \ln x$, on a alors $x = e^X$. On a alors :

$$x \to +\infty \quad \text{alors} \quad X \to +\infty$$

Notre limite devient alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

- Pour la deuxième limite, on fait le changement de variable suivant : $X = \dfrac{1}{x}$. On a alors :

$$x \to 0^+ \quad \text{alors} \quad X \to +\infty$$

La deuxième limite devient alors :

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = \lim_{X \to +\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0$$

**Remarque :** On peut dire que : « $x$ l'emporte sur $\ln x$ en $+\infty$ ».

## 2.8 Limites et dérivées des fonctions trigonométriques

**Théorème 14 :** D'après les fonctions dérivées des fonctions sinus et cosinus, on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

**Pré-requis :** Dérivées des fonctions sinus et cosinus.

**Démonstration :** On revient à la définition du nombre dérivée en 0.

$$\sin' 0 = \lim_{x \to 0} \frac{\sin h - \sin 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$

or on sait que : $\sin' 0 = \cos 0 = 1$ donc $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

de même, on a :

$$\cos' 0 = \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - \cos 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$

or on sait que : $\cos' 0 = -\sin 0 = 0$ donc $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$

## 2.9 Théorème fondamental de l'intégration

**Théorème 15 :** Soit une fonction $f$ continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.

La fonction $F$ définie par : $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et $F'=f$

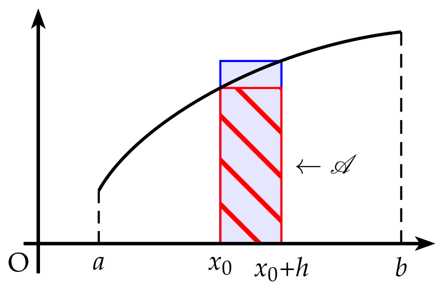
**Démonstration :** Dans le cas où $f$ est croissante sur $[a;b]$ (On admet ce théorème dans le cas général).

On revient à la définition de la dérivée, il faut montrer que si $x_0\in[a;b]$ :

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$$

- **1^er^ cas** : $h>0$, on a :
  $F(x_0+h)-F(x_0)=\displaystyle\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t=\mathscr{A}$
  (par soustraction d'aire).

  On sait que $f$ est croissante sur $[a;b]$, donc si $t\in[x_0;x_0+h]$, on a :
  $$f(x_0)\leqslant f(t)\leqslant f(x_0+h)$$
  donc en encadrant l'aire $\mathscr{A}$ par le rectangle minorant (hachuré) et le rectangle majorant (bleu) l'aire ( en bleu), on a :




$$f(x_0)\times h\leqslant \mathscr{A}\leqslant f(x_0+h)\times h$$
$$f(x_0)\leqslant \frac{\mathscr{A}}{h}\leqslant f(x_0+h)$$
$$f(x_0)\leqslant \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\leqslant f(x_0+h)$$

- **2^e^ cas** : $h<0$, on montre de même que : $f(x_0+h)\leqslant \dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\leqslant f(x_0)$

- **Conclusion** : on sait que $f$ est continue sur $[a;b]$, donc $\displaystyle\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$

  D'après le théorème des gendarmes, on a : $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$

## 2.10 Existence de primitives

**Théorème 16 :** Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitive sur I.

**Démonstration :** Cas où le fonction $f$ est continue sur un intervalle $[a;b]$ et admet un minimum $m$.On pose la fonction $g$ telle que : $g(x) = f(x) - m$

$g$ est continue (car somme de fonction continue) et positive sur $[a;b]$. D'après le théorème fondamental, la fonction $G$ définie ci-dessous est une primitive de $g$ sur $[a;b]$.

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction $F$ définie sur $[a;b]$ par : $F(x) = G(x) + mx$ est alors une primitive de $f$ car :

$$F'(x) = G'(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$$

**Remarque :** On admet ce théorème dans le cas général.

$\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de $f$ qui s'annule en $a$

# 3 Les nombres complexes

## 3.1 Propriétés des modules

**Théorème 17 :** Pour tous complexes $z$ et $z'$ non nuls, on a les relations suivantes :

1) $|z\,z'| = |z| \times |z'|$ 2) $|z^n| = |z|^n$ 3) $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

**Prérequis :** On suppose que $z\,\overline{z} = |z|^2$

**Démonstration :**

1) Pour le produit : on calcule la quantité :

$$|z\,z'|^2 = z\,z' \times \overline{z\,z'} = z\,z' \times \overline{z}\,\overline{z'} = z\,\overline{z} \times z'\,\overline{z'} = |z|^2 \times |z'|^2$$

Le module d'un nombre complexe est positif, donc : $|z\,z'| = |z| \times |z'|$

2) Pour la seconde, il suffit de faire une récurrence à partir du produit.

3) Pour le qutient, on pose pour $(z' \neq 0)$ : $Z = \dfrac{z}{z'}$

On a alors : $z = Z\,z'$ par la propriété du produit $|z| = |Z|\,|z'|$

d'où $|Z| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

## 3.2 Propriétés des arguments

**Théorème 18 :** Pour tous complexes $z$ et $z'$ non nuls, on a les relations suivantes :

1) $\arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$
2) $\arg(z^n) = n\arg(z) \quad [2\pi]$
3) $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$

**Prérequis :** On suppose connu les formules d'addition de cosinus et sinus :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

**Démonstration :**

1) On pose $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$
où $r$ et $r'$ d'une part et $\theta$ et $\theta'$ d'autre part sont respectivement les modules et arguments des nombres complexes $z$ et $z'$.
On calcule :

$$\begin{aligned} z\,z' &= r\,r'(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= r\,r'(\cos\theta\cos\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') \\ &= r\,r'\left[\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')\right] \\ &= r\,r'\left[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right] \end{aligned}$$

Par identification, on en déduit alors :

$$|z\,z'| = r\,r' = |z|\,|z'| \quad \text{et} \quad \arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$

2) On démontre $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\arg(z)$ par récurrence à partir de la propriété du produit.

3) Pour le quotient, on pose $Z = \dfrac{z}{z'}$, on a donc $z = Z\,z'$. Par la propriété du produit, on a :

$$\arg(z) = \arg(Z) + \arg(z') \quad [2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \arg(Z) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$$

# 4 Probabilité. Statistique

## 4.1 Indépendance

**Théorème 19 :** Si les évènement $A$ et $B$ sont indépendants, alors il en est de même pour :

1) $\overline{A}$ et $B$ 2) $A$ et $\overline{B}$ 3) $\overline{A}$ et $\overline{B}$

**Pré-requis :** $A$ et $B$ indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Probabilités totales.

**Démonstration :**

1) $A$ et $\overline{A}$ forment une partition de l'univer $\Omega$, donc :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

$A$ et $B$ sont indépendants donc : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

On a donc :

$$P(B) = P(A)P(B) + P(\overline{A} \cap B) \quad \Leftrightarrow \quad P(\overline{A} \cap B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\overline{A})$$

$\overline{A}$ et $B$ sont indépendants.

2) La démonstration est analogue (échanger $A$ et $B$)

3) D'après 1) $\overline{A}$ et $B$ sont indépendants, donc d'après 2), $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

## 4.2 Loi exponentielle - loi sans mémoire

**Théorème 20 :** La loi exponentielle est une loi **sans mémoire** c'est à dire que :

$$\forall t > 0 \text{ et } h > 0 \quad \text{on a} \quad P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$$

**Prérequis :** Définition de la loi et $P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - F(a) = e^{-\lambda a}$

**Démonstration :** On applique la formule des probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned} P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) &= \frac{P(X \geqslant t \ \text{ et } \ X \geqslant t+h)}{P(X \geqslant t)} = \frac{P(X \geqslant t+h)}{P(X \geqslant t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda h} = P(X \geqslant h) \end{aligned}$$

**Remarque :** On dit que la durée de vie d'un appareil est sans mémoire lorsque la probabilité que l'appareil fonctionne encore $h$ années supplémentaires sachant qu'il fonctionne à l'intant $t$, **ne dépend pas de** $t$.

## 4.3 Expérance d'une loi exponentielle

**Théorème 21 :** Si $X$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ alors son espérance mathématique vaut :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$$

**Démonstration :** D'après la définition, en posant $g(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$, on a :

$$\mathrm{E}(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Il faut trouver une primitive de la fonction $g$, pour cela on dérive la fonction $g$

$$g'(t) = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda^2 t e^{-\lambda t} = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda g(t) \quad \Leftrightarrow \quad g(t) = e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} g'(t)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \left( e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} g'(t) \right) \mathrm{d}t = \left[ -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} g(t) \right]_0^x \\ &= \frac{1}{\lambda} \left( -e^{-\lambda t} - g(x) + 1 + g(0) \right) = \frac{1}{\lambda} \left( -e^{-\lambda t} - \lambda x e^{-\lambda t} + 1 \right) \end{aligned}$$

On pose : $Y = -\lambda x$ , on a alors :

Si $x \to +\infty$ alors $Y \to -\infty$

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = \lim\limits_{Y \to -\infty} e^{Y} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \lambda x e^{-\lambda x} = \lim\limits_{Y \to -\infty} -Y e^{Y} = 0$

Par somme et produit, on a alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$$

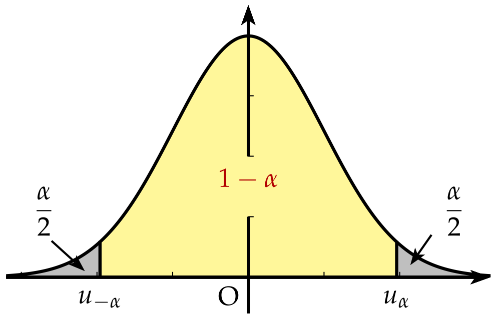
## 4.4 Loi normale - Probabilité d'intervalle centré en 0

**Théorème 22 :** $X$ est une variable aléatoire qui suit un loi normale centrée réduite. Soit $\alpha$ un réel de l'intervalle $]0\,;1[$. Il existe un **unique** réel **strictement positif** $u_\alpha$ tel que :
$$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$$

**Pré-requis :** Loi normale centrée réduite et théorème des valeurs intermédiaires

**Démonstration :** On cherche un réel $x$ strictement positif tel que :

$$\begin{aligned}
P(-x \leqslant X \leqslant x) &= 1-\alpha\\
\Phi(x) - \Phi(-x) &= 1-\alpha\\
\Phi(x) - 1 + \Phi(x) &= 1-\alpha\\
2\Phi(x) - 1 &= 1-\alpha\\
\Phi(x) &= 1-\frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$




On sait que la fonction $\Phi$ est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$. De plus :
$$\lim_{x\to 0} \Phi(x) = \Phi(0) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$$

et $\quad 0 < \alpha < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{2} < 1 - \dfrac{\alpha}{2} < 1$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x = u_\alpha$ strictement positif tel que $\Phi(x) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$

## 4.5 Intervalle de fluctuation

**Théorème 23 :** Si la varialble aléatoire $X_n$ suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ alors pour tout réel $\alpha$ de $]0\,;1[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha \quad \text{où} \quad I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

$u_\alpha$ étant le nombre tel que $P(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$ lorsque $Z$ suit ine loi normale centrée réduite.

**Remarque :** le mot asymptotique vient du passage à la limite de l'intervalle $I_n$

**Démonstration :** On pose $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

D'après le théorème Moivre-Laplace : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha)$ suit une loi normale centrée réduite de variable aléatoire $Z$.

On sait d'après les propriétés de la loi normale centrée réduite que pour tous $\alpha$ de $]0\,;1[$, il existe un unique réel strictement positif $u_\alpha$ tel que :

$$P(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u\alpha) = 1-\alpha$$

De plus :

$$\begin{aligned}
-u_\alpha \leqslant & Z_n \leqslant u_\alpha \\
-u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leqslant & X_n - np \leqslant u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \\
np - u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leqslant & X_n \leqslant np + u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \\
np - u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant & \frac{X_n}{n} \leqslant p + u_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\dfrac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha$

## 4.6 Statistique - Intervalle de confiance

On suppose les trois conditions d'approximations remplies :

$$n \geqslant 30, \quad np \geqslant 5 \quad \text{et} \quad n(1-p) \geqslant 5$$

**Théorème 24 :** Soit $F_n$ la variable aléatoire qui à chacun des échantillons de taille $n$ associe la fréquence du caractère dans cet echantillon.
La proportion inconnue $p$ est telle que :

$$P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95$$

**Démonstration :** On a vu que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% peut être simplifié par : $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$
On a donc :

$$\begin{aligned} p - \frac{1}{\sqrt{n}} &\leqslant F_n \leqslant p + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ -\frac{1}{\sqrt{n}} &\leqslant F_n - p \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \\ -F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} &\leqslant -p \leqslant -F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} &\leqslant p \leqslant F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Ainsi : $P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95$

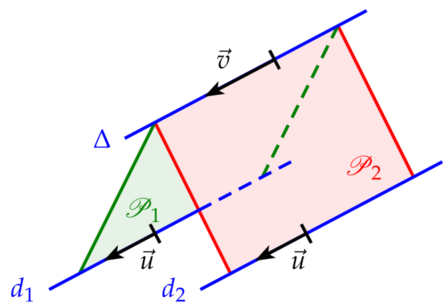
# 5 Géométrie dans l'espace

## 5.1 Le théorème du toit

**Théorème 25 :** Soient $d_1$ et $d_2$ deux droites parallèles contenues respectivement dans les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$. Si ces deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants en une droite $\Delta$, alors la droite $\Delta$ est parallèle à $d_1$ et $d_2$.

**Démonstration :** Par l'absurde. On considère que $\Delta$ n'est pas paralléles à $d_1$ ce qui entraine que $\Delta$ n'est pas parallèle à $d_2$.
On appelle $\vec{v}$ un vecteur directeur de $\Delta$

- Comme $d_1$ et $d_2$ sont parallèles, on appele $\vec{u}$ leur vecteur directeur.
- Comme $\Delta$ n'est pas parallèle à $d_1$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc, comme $\Delta$ est contenu dans $\mathscr{P}_1$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}_1$.
- Comme $\Delta$ est aussi contenu dans $\mathscr{P}_2$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont aussi des vecteurs directeurs du plan $\mathscr{P}_2$.




- On en déduit que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles qui est contradictoire avec l'hypothèse $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sécants

$\Delta$ est donc parallèle à $d_1$ et $d_2$.

## 5.2 Droite orthogonale à un plan

**Théorème 26 :** Une droite $\Delta$ est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, il existe deux droites sécantes de $\mathscr{P}$ perpendiculaires à $\Delta$.

**Démonstration :**

- $\Rightarrow$ Si $\Delta$ est orthogonale à $\mathscr{P}$ donc $\Delta$ est orthogonale à toute droite de $\mathscr{P}$ donc à deux sécantes de $\mathscr{P}$
- $\Leftarrow$ Soit $\vec{n}$ un vecteur directeur de $\Delta$ et $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ les vecteurs directeurs respectifs des deux sécantes de $\mathscr{P}$ : $d_1$ et $d_2$.
  1) $\Delta$ est perpendiculaire à $d_1$ et $d_2$ donc : $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$
  2) $d_1$ et $d_2$ sont sécantes donc les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires, ils forment donc un couple de vecteurs directeur du plan $\mathscr{P}$.
  3) Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur d'une droite quelconque de $\mathscr{P}$, comme $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ forme un couple de vecteurs directeurs de $\mathscr{P}$, on a : $\vec{v} = a\,\vec{u}_1 + b\,\vec{u}_2$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$.
  4) $\overrightarrow{n} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{n} \cdot (a\,\vec{u}_1 + b\,\vec{u}_2) = a\,\overrightarrow{n} \cdot \vec{u}_1 + b\,\overrightarrow{n} \cdot \vec{u}_2 = 0$ d'après le 1)

  $\Delta$ est donc orthogonale à toute droite de $\mathscr{P}$, donc $\Delta$ est orthogonale à $\mathscr{P}$

## 5.3 Équation cartésienne d'un plan

**Théorème 27 :** L'équation cartésienne d'un plan est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{avec } a, b \text{ et } c \text{ non tous nul}$$

Le vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ est alors un vecteur normal au plan.

**Démonstration :**

- $\Rightarrow$ Soit un plan $\mathscr{P}$, un point $A$ de $\mathscr{P}$, un vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ de $\mathscr{P}$. Un point $\mathrm{M}(x;y;z)$ du plan $\mathscr{P}$ vérifie alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} &= 0 \\ a(x - x_\mathrm{A}) + b(y - y_\mathrm{A}) + c(z - z_\mathrm{A}) &= 0 \\ ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) &= 0 \end{aligned}$$

  On pose $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$, on a alors

$$ax + by + cz + d = 0$$

- $\Rightarrow$ Si on a l'équation : $ax + by + cz + d = 0$, avec $a$, $b$ et $c$ non tous nul, on peut toujours trouver un point $\mathrm{A}(x_0; y_0; z_0)$ qui verifie l'équation

$$ax + by + cz + d = 0$$

  On a alors $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, par exemple, si $a \neq 0$, on peut prendre $x_0 = -\dfrac{d}{a}$ et $y_0 = z_0 = 0$.

  Si $\mathrm{M}(x;y;z)$ vérifie l'équation, alors : $ax + by + cz + d = 0$, et en remplaçant $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$, on obtient alors :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

  Cette égalité traduit alors, en prenant $\vec{n}(a;b;c)$, la relation $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0$. Ce qui montre que le plan passe par M et a pour vecteur normal $\vec{n}$.

**Remarque :** L'équation cartésienne n'est pas unique. On peut toujours multiplier les coefficients $a$, $b$ et $c$ par un facteur $k$ non nul.