Mathématiques
Terminale S

Tout ce qu'il faut savoir

Paul Milan

Table des matières

1 Rappels sur les suites **4**
1 Définition . . . 4
2 Variation . . . 4
3 Visualisation . . . 4
4 Programmation . . . 4
5 Suites arithmétiques . . . 5
6 Suites géométriques . . . 5

2 Raisonnement par récurrence. Limite d'une suite **6**
1 Raisonnement par récurrence . . . 6
2 Limite d'une suite . . . 6
3 Opérations sur les limites . . . 7
4 Convergence d'une suite monotone . . . 8

3 Étude d'une fonction (chap. 3 à 6) **10**
1 Limites . . . 10
2 Continuité . . . 11
3 Dérivabilité . . . 12
4 Fonctions exponentielle et logarithme . . . 14

7 Les fonctions sinus et cosinus **18**
1 Équation trigonométrique . . . 18
2 Signe des fonctions sinus et cosinus . . . 18
3 Propriétés des fonctions sinus et cosinus . . . 18
4 Dérivées et limites . . . 19
5 Variations et représentations . . . 19
6 Fonctions sin(ax+b) et cos(ax+b) . . . 19
7 Application aux ondes progressives . . . 20

8 Intégrales et primitives **22**
1 Aire sous une courbe . . . 22
2 Primitives . . . 22
3 Calcul de primitives . . . 23
4 Propriétés de l'intégrale . . . 24

9 Les nombres complexes **26**
1 Définition . . . 26
2 Conjugué . . . 26
3 Second degré . . . 26
4 Forme trigonométrique . . . 27
5 Vecteur, alignement et orthogonalité . . . 27

10 Probabilités conditionnelles. Loi binomiale **28**
1 Probabilité . . . 28
2 Probabilités conditionnelles . . . 29
3 Indépendance de deux événements . . . 30
4 Loi binomiale . . . 30

11 Lois à densité. Loi normale **32**
1 Lois à densité . . . 32
2 La loi normale . . . 33

12 Statistiques **36**
1 Intervalle de fluctuation . . . 36
2 Prise de décision . . . 36
3 Estimation - Intervalle de confiance . . . 36

13 Géométrie dans l'espace. Vecteurs et produit scalaire. **38**
1 Relations entre droites et plans . . . 38
2 Parallélisme . . . 38
3 Orthogonalité . . . 38
4 Vecteurs dans l'espace . . . 39
5 Coplanarité . . . 39
6 Dans un repère . . . 39
7 Représentation paramétrique d'une droite et d'un plan . . . 40
8 Produit scalaire . . . 40
9 Équation cartésienne d'un plan . . . 41
10 Section d'un cube par un plan . . . 41
11 Volume d'une pyramide et d'une sphère . . . 42

Chapitre 1

Rappels sur les suites

1 Définition

On peut définir une suite (u_n) :

- De façon explicite : $u_n = f(n)$.
- De façon récurrente :
  - à un terme : u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$
  - à deux termes : u_0 et u_1 et $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$
- Par une somme de termes : $u_n = \sum_{k=0}^{n} T_n$

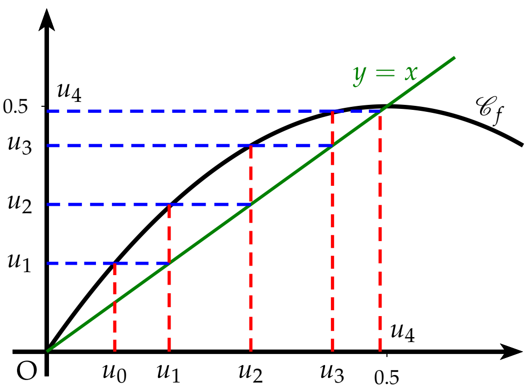
2 Variation

Pour connaître les variations d'une suite (u_n), on étudie :

- Le signe de : $u_{n+1} - u_n$
- Si les termes sont strictement positifs positifs, on peut comparer de rapport : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
- Si la suite est définie de façon explicite, on peut aussi étudier le signe de la dérivée de la fonction associée.

3 Visualisation

Pour visualiser une suite définie par récurrence, on trace, la fonction f et la droite $y = x$ qui permet de reporter les termes sur l'axe des abscisses.



4 Programmation

Deux petits programmes pour programmer un terme particulier ou la liste des premiers termes d'une suite définie par récurrence : (on rentre la fonction f à part, $A = u_0$)

Variables
A, N, I, U, f (fonction)
Algorithme
Lire A, N
$A \to U$
Pour I variant de 1 à N
 $f(U) \to U$
FinPour
Afficher U

Variables
A, N, I, U, L_1 (liste), f (fonction)
Algorithme
Lire A, N
$A \to U$
Liste L_1 remis à 0
$U \to L_1(1)$
Pour I variant de 1 à N
 $f(U) \to U$
 $U \to L_1(I+1)$
FinPour
Afficher L_1

5 Suites arithmétiques

Définition : $u_{n+1} = u_n + r$ et un premier terme. r est la raison

Propriété : $u_{n+1} - u_n = \text{Cte} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Terme général : $u_n = u_0 + nr \quad \text{ou} \quad u_n = u_p + (n-p)r$

Somme des termes : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = \text{Nbre de termes} \times \frac{\Sigma \text{ termes extrèmes}}{2}$$

6 Suites géométriques

Définition : $u_{n+1} = q \times u_n$ et un premier terme. q est la raison

Propriété : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \text{Cte} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Terme général : $u_n = u_0 \times q^n \quad \text{ou} \quad u_n = u_p \times q^{n-p}$

Somme des termes : $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{Nbre termes}}}{1 - q}$$

Chapitre 2

Raisonnement par récurrence. Limite d'une suite

1 Raisonnement par récurrence

1.1 Axiome de récurrence

Définition 1 : Soit une propriété $\mathcal{P}$ définie sur $\mathbb{N}$. Si :

- la propriété est **initialisée** à partir d'un certain rang n_0
- la propriété est **héréditaire** à partir d'un certain rang n_0 (c'est à dire que pour tout $n \geqslant n_0$ alors $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$)

Alors : la propriété est vraie à partir du rang n_0

1.2 Exemple

Démontrer que, pour tout entier naturel, la suite (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ est telle que $0 < u_n < 2$

Initialisation : on a $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 < 2$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $0 < u_n < 2$, montrons que $0 < u_{n+1} < 2$.
La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$ est croissante car composée de deux fonctions croissantes
$0 < u_n < 2 \;\Leftrightarrow\; f(0) < f(u_n) < f(2) \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2} < u_{n+1} < 2 \;\Rightarrow\; 0 < u_{n+1} < 2$
La proposition $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

2 Limite d'une suite

Définition 2 : On dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et l'on dit que la suite **converge** vers ℓ

On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, et seulement si, tout intervalle $]A;+\infty[$ (resp. $]-\infty;B[$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ resp. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

On dit que la suite **diverge** vers $+\infty$ (resp. $-\infty$)

Soit trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). Si à partir d'un certain rang, on a :

Théorème d'encadrement ou "des gendarmes"

$v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

Théorème de comparaison

- $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- $u_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Suites géométrique : soit q un réel. On a les limites suivantes :

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q \leqslant -1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas

3 Opérations sur les limites

3.1 Limite d'une somme

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. Ind.

3.2 Limite d'un produit

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞	F. ind.	∞

3.3 Limite d'un quotient

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	∞
Si (v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	0	0	∞	ℓ'	∞
alors $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞	F. ind.	0	∞	F. ind.

4 Convergence d'une suite monotone

Définition 3 : On dit que la suite (u_n) est **majorée** si, et seulement si, il existe un réel M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$$

On dit que la suite(u_n) est **minorée** si, et seulement si, il existe un réel m tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant m$$

Si (u_n) est majorée et minorée, on dit que la suite est **bornée**.

Divergence

- Si une suite (u_n) est **croissante et non majorée** alors la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Si une suite (u_n) est **décroissante et non minorée** alors la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Convergence

- Si une suite (u_n) est **croissante et majorée** alors la suite (u_n) converge.
- Si une suite (u_n) est **décroissante et minorée** alors la suite (u_n) converge.

Théorème du point fixe

Soit une suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente vers ℓ.
Si la fonction associée f est continue en ℓ, alors la limite de la suite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple

Calculer la limite de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

On peut montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$

La suite (u_n) est alors croissante et majorée par 2, elle est donc convergente vers une limite ℓ.

La fonction f telle que : $f(x) = \sqrt{2 + x}$ est définie et continue sur $]-2; +\infty[$. Comme la suite (u_n) est convergente vers ℓ, d'après le théorème du point fixe, ℓ verifie l'équation $\ell = \sqrt{2 + \ell}$.
En élevant au carré, on trouve : $\ell^2 - \ell - 2 = 0$ qui admet deux solutions -1 et 2. Comme la suite (u_n) est positive, elle converge donc vers 2.

Chapitre 3

Étude d'une fonction (chap. 3 à 6)

1 Limites

1.1 Somme

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. Ind.

1.2 Produit

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si g a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $f \times g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞	F. ind.	∞

1.3 Quotient

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	∞
Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0 **	0	∞	ℓ' **	∞
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	∞	F. ind.	0	∞	F. ind.

1.4 Composition

Composition de deux fonctions.
Soit deux fonctions f, g. Soient a, b et c des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si} \quad \lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x \to b} g(x) = c \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to a} g\left[f(x)\right] = c$$

1.5 Fonction et suite

Soit une suite (u_n) définie par : $u_n = f(n)$. f est alors la fonction réelle associée à la suite (u_n). Soit a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$

$$\text{Si} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = a \quad \text{alors} \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = a$$

1.6 Comparaison

f, g, et h sont trois fonctions définies sur l'intervalle $I =]b; +\infty[$ et ℓ un réel.

1) **Théorème des « Gendarmes »**
   Si pour tout $x \in I$, on a : $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ **et si** :
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = \ell \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

2) **Théorème de comparaison**
   Si pour tout $x \in I$ on a : $f(x) \geqslant g(x)$ **et si** :
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2 Continuité

Définition 4 : Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I. Soit a un élément de I. On dit que la fonction f est **continue** en a si et seulement si :
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Fonctions continues : Toutes fonctions construites par somme, produit, quotient ou par composition à partir de fonctions élémentaires sont continues sur leur ensemble de définition.
C'est par exemple le cas pour les fonctions polynômes et rationnelles.

Si f est dérivable en a alors la fonction f est continue en a.
⚠ La réciproque est fausse.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit une fonction f définie et **continue** sur un intervalle $I = [a, b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in I$ tel que $f(c) = k$. (c n'est pas nécessairement unique.

Soit une fonction f **continue et strictement monotone** sur $I = [a, b]$. Alors, pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution **unique** dans $I = [a, b]$

Si l'intervalle $I =]a, b[$ est ouvert, k doit alors être compris entre $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to b} f(x)$

Soit f défnie par $f(x) = x^3 + x - 3$
f est continue et strictement croissante sur I=[1 ;2] car f est dérivable sur I et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$.
De plus $f(1)=-1$ et $f(2)=7$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1;2]$.

Ci-contre un algorithme, utilisant le principe de **dichotomie**, permet de trouver une approximation de α à la précision de 10^{-6}. On pose :

- A et B les bornes de l'intervalle.
- P la précision (entier positif).
- N le nombre d'itérations.

On rentre : $A = 1$, $B = 2$, $P = 6$ et $f(x) = x^3 + x - 3$

On obtient : $A = 1{,}213\,411$, $B = 1{,}213\,412$ et $N = 20$.

Variables
A, B, C, P, N, f (fonction)
Algorithme
Lire A, B, P
$0 \to N$
Tant que $B - A > 10^{-P}$
    $\dfrac{A+B}{2} \to C$
    Si $f(A) \times f(C) > 0$ (*)
        $C \to A$
    Sinon
        $C \to B$
    FinSi
    $N + 1 \to N$
FinTanque
Afficher : A, B, N

3 Dérivabilité

Définition 5 : Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un point de I. On dit que la fonction f est dérivable en a si et seulement si le taux d'accroissement de la fonction f en a admet une limite finie ℓ en a, c'est à dire :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell \quad \text{et} \quad \ell = f'(a)$$

Variation : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

- Si $\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = 0$, alors la fonction $f$est **constante** sur I.
- Si $\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x) > 0$, alors la fonction f est **croissante** sur I.
- Si $\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x) < 0$, alors la fonction f est **décroissante** sur I.

3.1 Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Dérivée	D'_f
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$

Fonction	Dérivée	D'_f
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

3.2 Règles de dérivation

Dérivée	Formule
de la somme	$(u+v)' = u' + v'$
de ku	$(ku)' = ku'$
du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
de l'inverse	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
du quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
de la racine	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
du logarithme	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
de l'exponentielle	$[e^u]' = u'e^u$

Tangente : Lorsque f est dérivable en a, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente de coefficient directeur $f'(a)$ dont l'équation est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Pour déterminer les points de $\mathscr{C}_f$ où la tangente est parallèle à une droite d'équation $y = mx + p$, on résout l'équation $f'(x) = m$.

Extremum : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I. a un point de I.

- Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.
- Si $f'(a) = 0$ et si f' change de signe en a alors la fonction f admet un extremum local en a.

4 Fonctions exponentielle et logarithme

4.1 Existence

Définition 6 :

- La fonction exponentielle "exp" est l'unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$. On note alors $\exp(x) = e^x$
- La fonction logarithme népérien notée ln est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Elle est définie sur $\mathbb{R}_+^*$

⚠ La fonction e^{x^2-1} existe sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction $\ln(x^2-1)$ existe sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ car il faut que $x^2 - 1 > 0$

Relation entre les deux fonctions

Pour tout y réel positif et x réel, on a :

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = x$$

$$\ln(e^x) = x \quad \text{et} \quad e^{\ln y} = y$$

4.2 Variations des deux fonctions

La fonction exponenttielle et la fonction logarithme sont strictement croissante sur leur ensemble de définition

Fonction logarithme

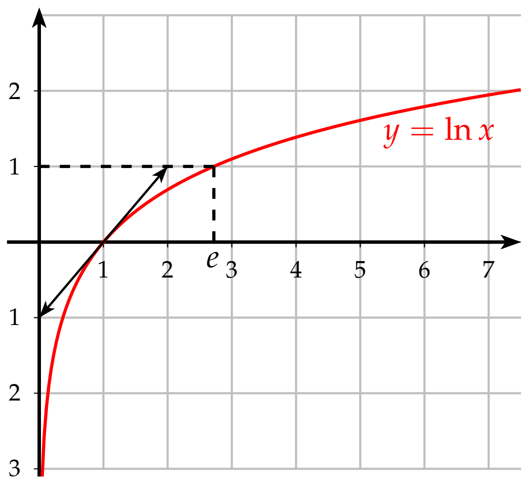
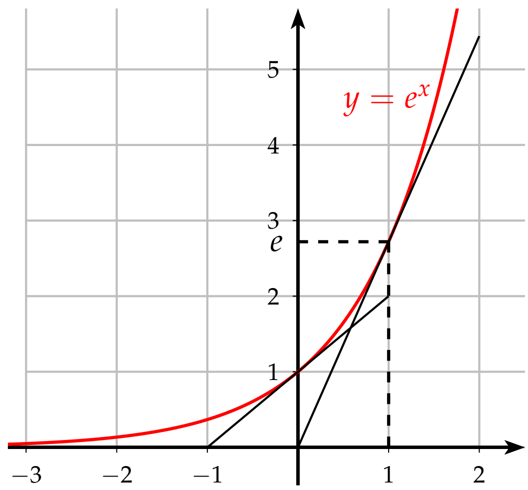
x	0	1	e	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\Vert$	$+$		
ln	$\Vert$ $-\infty$	0	1	$+\infty$

Fonction exponentielle

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$		
$\exp(x)$	0	1	e	$+\infty$

4.3 Représentation des deux fonctions

Les deux courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Fonction logarithme	Fonction exponentielle
	

4.4 Propriétés algébriques

Fonction logarithme	Fonction exponentielle
$\ln 1 = 0 \quad \text{et} \quad \ln e = 1$ $\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad , \quad \ln \frac{1}{b} = -\ln b$ $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad , \quad \ln a^n = n \ln a$ $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$	$e \simeq 2{,}718\,282$ $e^0 = 1 \quad \text{et} \quad e^1 = e$ $e^{a+b} = e^a \times e^b \quad , \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad , \quad (e^a)^n = e^{na}$

- Pour $x > 0$, on a : $\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -\ln x^2 = -2\ln x$
- Pour tout x, on a : $\left(e^{-x}\right)^2 \times e^{3x} = e^{-2x} \times e^{3x} = e^x$

4.5 Signe des deux fonctions

Fonction logarithme	**Fonction exponentielle**
Si $0 < x < 1$ alors $\ln x < 0$ Si $x > 1$ alors $\ln x > 0$	Pour tout x : $e^x > 0$

4.6 Équations et inéquations

Fonction logarithme	**Fonction exponentielle**
Pour a, b et x positif $\ln a = \ln b \quad \Leftrightarrow \quad a = b$ $\ln a < \ln b \quad \Leftrightarrow \quad a < b$ $\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$ $\ln x < y \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < e^y$	Pour a, b et x positif $e^a = e^b \quad \Leftrightarrow \quad a = b$ $e^a < e^b \quad \Leftrightarrow \quad a < b$ $e^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y = \ln x$ $e^y < x \quad \Leftrightarrow \quad y < \ln x$

⚠ Pour les équations et les inéquations avec les logarithmes, ne pas oublier de commencer par définir les **conditions d'existence** (les expressions contenues dans un logarithme doivent être positives)

4.7 Limites et croissance comparée

Fonction logarithme	**Fonction exponentielle**
$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ ou $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

4.8 Exemples

Équations et inéquations

- Résoudre : $\ln x + \ln 2 = 5 \quad D_f = \mathbb{R}_+^*$

  On a alors : $\ln 2x = 5 \Leftrightarrow 2x = e^5 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^5}{2}$
- Résoudre : $\ln(x+2) \leqslant 1 \ \ D_f =]-2;+\infty[$

  On a alors $\ x+2 \leqslant e \Leftrightarrow x \leqslant e-2, \quad S =]-2; e-2]$
- Résoudre $\ e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 3 = 0$ avec $X = e^x$ et $X > 0$

  $X_1 = -1$ (non retenu) donc $X_2 = 3$ d'où $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$
- Résoudre $\ e^x < 5e^{-x} \Leftrightarrow e^x < \dfrac{5}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x} < 5 \Leftrightarrow 2x < \ln 5 \Leftrightarrow x < \dfrac{\ln 5}{2}$

  $S = \left]-\infty; \dfrac{\ln 5}{2}\right[$

Limites

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} 3e^x - x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(3 - \dfrac{x^2}{e^x}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x + \ln x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} \times \dfrac{1 + \frac{\ln x}{e^x}}{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{e^x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} + \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}(1 + x\ln x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x(x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x + e^x = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Chapitre 7

Les fonctions sinus et cosinus

1 Équation trigonométrique

Équations trigonométriques

- L'équation $\cos x = \cos a$ admet les solutions suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$x = a + k2\pi \quad \text{ou} \quad x = -a + k2\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

- L'équation $\sin x = \sin a$ admet les solutions suivantes sur $\mathbb{R}$:

$$x = a + k2\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - a + k2\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

2 Signe des fonctions sinus et cosinus

Sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$, les fonctions sinus et cosinus ont les signes suivants :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	1	$+$	0
$\cos x$	-1	$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	-1

3 Propriétés des fonctions sinus et cosinus

Parité

- La fonction sinus est **impaire** : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(-x) = -\sin x$
- La fonction cosinus est **paire** : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(-x) = \cos x$

Périodicité

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π **périodiques** : $T = 2\pi$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x \quad \text{et} \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

De sinus à cosinus

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

4 Dérivées et limites

Dérivées
Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$\sin' x = \cos x \quad \text{et} \quad \cos' x = -\sin x$$

Limites

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

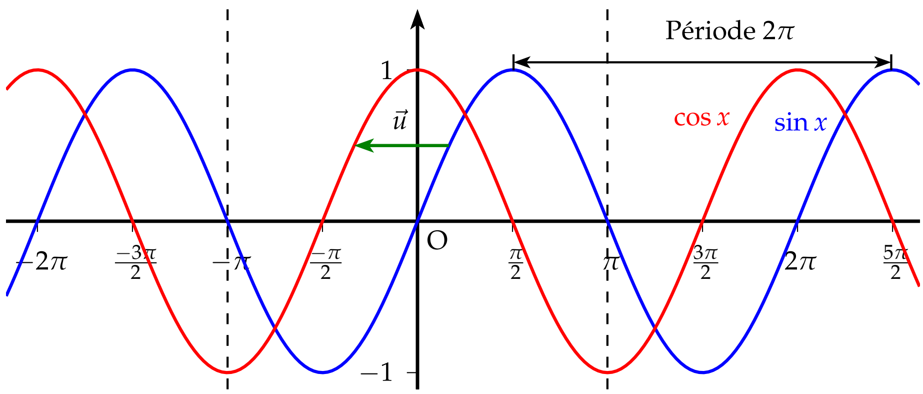
5 Variations et représentations

- Les variations des fonctions sinus et cosinus sont les suivantes :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin' x = \cos x$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	↘	-1	↗	1	↘	0

x	$-\pi$		0		π
$\cos' x = -\sin x$		$+$	0	$-$	
$\cos x$	-1	↗	1	↘	-1

- Les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus sont des sinusoïdes.



6 Fonctions $\sin(ax + b)$ et $\cos(ax + b)$

Dérivée
Les fonctions $\sin(ax + b)$ et $\cos(ax + b)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\sin'(ax + b) = a\cos(ax + b) \quad \text{et} \quad \cos'(ax + b) = -a\sin(ax + b)$$

Périodicité
Les fonctions $\sin(ax + b)$ et $\cos(ax + b)$ sont $\dfrac{2\pi}{a}$ périodiques

7 Application aux ondes progressives

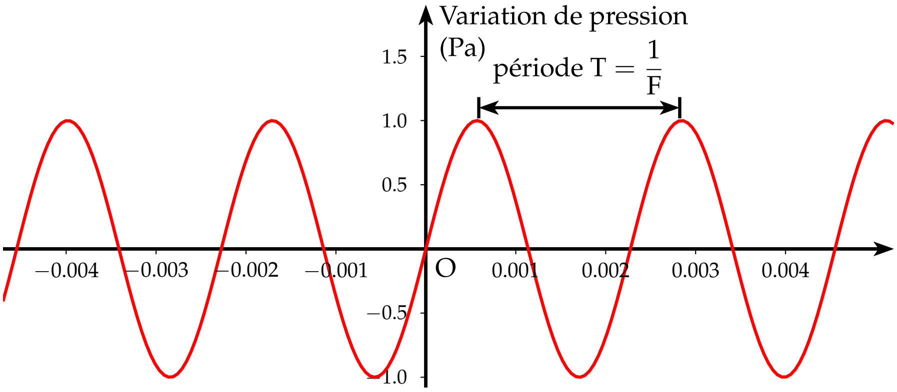
Un son pur est une onde sinusoïdale caractérisée par :

- Sa fréquence F (en Hertz, nombre de pulsations par seconde) qui détermine la hauteur du son.
- Son amplitude (pression acoustique) P (en Pascal).

La fréquence F est relié à la période T de la sinusoïde par la relation : $\mathrm{F} = \dfrac{1}{\mathrm{T}}$
La fonction f associée est donc de la forme : $f(t) = \mathrm{P}\sin(2\,\pi \mathrm{F}\,t)$

La note de référence (donnée par un diapason) sur laquelle s'accordent les instruments de l'orchestre est le la_3 qui vibre à 440 Hz. Pour une amplitude de 1 Pa, cette note peut être associé à la fonction f définie par : $f(t) = \sin(880\pi\,t)$.

L'écran d'un oscilloscope donne alors :

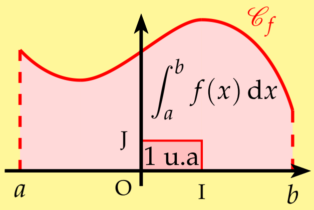


Chapitre 8

Intégrales et primitives

1 Aire sous une courbe

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a,b]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. La mesure de l'aire, en u.a., sous la courbe $\mathscr{C}_f$ entre les abscisses a et b est donné par : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.



2 Primitives

Théorème fondamental Soit une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a,b]$. La fonction F définie par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a,b]$ et $F' = f$

Primitives

- F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable et si $\forall x \in \mathrm{I}$, on a : $F'(x) = f(x)$
- Si F_0 est une primitive de f sur un intervalle I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme : $F(x) = F_0(x) + C$ où C est une constante réel.
- Il existe une unique primitive F de f sur un intervalle I telle que pour les réels x_0 et y_0, on a : $F(x_0) = y_0$
- Toute fonction **continue** sur un intervalle I **admet des primitives**.

Si F est une primitive quelconque d'une fonction f continue sur un intervalle I, alors pour tous réels a et b de I on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

3 Calcul de primitives

Fonction	Primitive	Intervalle
$f(x) = k$	$F(x) = kx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \dfrac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln\|x\|$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad n \neq 1$	$F(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

Primitve de la somme	$\int (u+v) = \int u + \int v$
Primitive du produit par un réel	$\int (ku) = k\int u$
Primitive de $u'u^n$	$\int u'u^n = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
Primitive de $\dfrac{u'}{u}$	$\int \dfrac{u'}{u} = \ln\|u\|$
Primitive de $\dfrac{u'}{u^n} \quad n \neq 1$	$\int \dfrac{u'}{u^n} = -\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}}$
Primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$\int \dfrac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$
Primitive de $u'e^u$	$\int u'e^u = e^u$
Primitive de $u(ax+b)$	$\int u(ax+b) = \dfrac{1}{a}U(ax+b)$

Recherche d'une primitive

Pour les fonctions usuelles, on utilise directement les formules.

Pour autres fonctions, il faut d'abord identifier la forme qui ressemble le plus à la fonction. Si on a la forme exacte, on utilise directement la formule correspondante. Dans le cas contraire, on écrit la forme exacte qu'il faudrait pour la fonction f et on rectifie en multipliant par le coefficient adéquat.

Exemple : : Soit f définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{(3x+6)^2}$

On pense à la forme $\dfrac{u'}{u^n}$ avec $n = 2$ dont une primitive est $\dfrac{-1}{u}$.

On écrit $f(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{(3x+6)^2}$.

Une primitive de f sur $]-2;+\infty[$ est donc F définie par $F(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3x+6}$

Soit g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

La fonction g est de la forme $u'u$ donc une primitive est $\dfrac{1}{2}u^2$ d'où $G(x) = \dfrac{\ln x}{2}$

Calcul d'intégrale

Exemple : $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e = \frac{\ln^2 e}{2} - \frac{\ln^2 1}{2} = \frac{1}{2}$

4 Propriétés de l'intégrale

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- **relation de Chasles** $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$
- **Linéarité** $\displaystyle\int_a^b (af(x) + bg(x))\,\mathrm{d}x = a\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + b\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Sur un intervalle $[a,b]$

- Si $f(x) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
- Si $f(x) \geqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- **Inégalité de la moyenne :**
  Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ alors $\displaystyle m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$

Valeur moyenne
Si f est continue sur $[a;b]$, la valeur moyenne μ de f sur $[a;b]$ est égale à :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Chapitre 9

Les nombres complexes

1 Définition

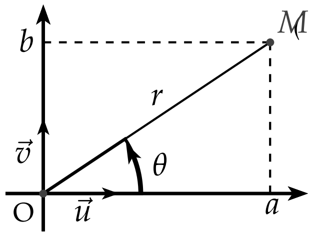
La forme algébrique d'un nombre complexe z est de la forme :

$z = a + ib$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

La partie réelle de z : $\text{Re}(z) = a$

La partie imaginaire de z : $\text{Im}(z) = b$

Le module de z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$



2 Conjugué

Le conjugué d'un nombre complexe z est noté $\bar{z} = a - ib,$.

Pour tout z complexe, on a : $z\bar{z} = |z|^2$

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$, $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$, $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

$z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\,\text{Im}(z)$

z réel alors : $z = \bar{z}$, z imaginaire pur alors : $z + \bar{z} = 0$

3 Second degré

Équation du second degré à coefficients réels dans $\mathbb{C}$

$az^2 + bz + c = 0$ on a : $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$ 2 racines réelles : $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = 0$ 1 racine double : $\dfrac{-b}{2a}$

$\Delta < 0$ 2 racines complexes conjuguées : $\dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

4 Forme trigonométrique

La forme trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe z ($z \neq 0$) est de la forme :

$$z = r(\cos\theta) + i\sin\theta) \quad \text{et} \quad z = re^{i\theta}$$
$$\text{avec} \quad r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{et} \quad \arg(z) = \theta \quad [2\pi]$$
$$\cos\theta = \frac{a}{r} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{b}{r}$$

On a les relations : $\quad i = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad$ et $\quad -1 = e^{i\pi}$

$$|z\,z'| = |z|\,|z'| \quad \text{et} \quad \arg(z\,z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$
$$|z^n| = |z|^n \quad \text{et} \quad \arg(z^n) = n\arg(z) \quad [2\pi]$$
$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$$

formule de Moivre : $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{i\,n\theta}$

formule d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Si $z = r\,e^{i\,\theta}$ alors $\bar{z} = r\,e^{-i\,\theta}, \quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\,e^{-i\,\theta}$

5 Vecteur, alignement et orthogonalité

Soit les point A, B, C et D, on a :

- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ alors $AB = |z_B - z_A|$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ orthogonaux $\Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ imaginaire pur.

Chapitre 10

Probabilités conditionnelles
Loi binomiale

1 Probabilité

1.1 Généralités

Lors d'une expérience aléatoire :

- L'univers Ω est l'ensemble des issues possibles.
- Un événement A est une partie de l'univers.
- Un événement élémentaire e_i est un événement ne comportant qu'un seul élément.
- L'événement contraire de l'événement A est l'événement noté $\overline{\mathrm{A}}$ formé de tous les éléments de Ω n'appartenant pas à A.
- L'événement $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ (noté aussi "A et B") est l'événement formé des éléments de Ω appartenant à A et à B.
- L'événement $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ (noté aussi "A ou B") est l'événement formé des éléments de Ω appartenant au moins à l'un des événements A ou B.
- Deux événements A et B sont dits incompatibles si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$.
- Si $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ et si à chaque issue e_i on associe un nombre $P(e_i)$ tel que $0 \leqslant P(e_i) \leqslant 1$ et $P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = 1$, on dit que l'on a défini une loi de probabilité sur Ω.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Pour tous événements A et B :

- $P(\varnothing) = 0\,; \quad P(\Omega) = 1$
- $0 \leqslant P(\mathrm{A}) \leqslant 1\,; \quad P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - P(\mathrm{A})$
- $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$
  (si A et B sont incompatibles alors $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})$)
- Pour une loi équirépartie :

$$P(\mathrm{A}) = \frac{\text{nbre d'éléments de A}}{\text{nbre d'éléments de }\Omega} = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

1.2 Variable aléatoire

Une variable aléatoire X définie sur un univers Ω est une fonction qui à chaque issue associe un réel x_i. La probabilité que X prenne la valeur x_i est alors notée $P(\mathrm{X} = x_i)$ ou p_i.

- Définir la loi de probabilité de X, c'est donner (sous forme d'un tableau) la probabilité de chacun des événements $X = x_i$.
- Espérance mathématique de X : $E(X) = \sum p_i x_i = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$
  L'espérance représente la valeur moyenne que prend X si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire
- Variance de X : $V(X) = \sum p_i x_i^2 - E^2(X) = p_1 x_1^2 + \cdots + p_n x_n^2 - E^2(X)$
- Écart-type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple : On lance 3 fois de suite un dé. Le joueur gagne 6 euros s'il n'obtient aucun 1 et aucun 2 et il perd 3 euros dans le cas contraire. X, la variable aléatoire égale au gain du joueur, ne peut prendre que les valeurs -3 et 6.

On a $P(X=6) = \dfrac{4^3}{6^3} = \dfrac{8}{27}$ et $P(X=-3) = 1 - p(X=6) = \dfrac{19}{27}$

$$E(X) = -3 \times \frac{19}{27} + 6 \times \frac{8}{27} = -\frac{1}{3}$$

$$V(X) = (-3)^2 \times \frac{19}{27} + 6^2 \times \frac{8}{27} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{152}{9} \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{152}{9}} = \frac{2\sqrt{38}}{3}$$

2 Probabilités conditionnelles

Etant donné deux événements A et B ($B \neq \varnothing$) d'un univers Ω. On appelle probabilité de B sachant A, le réel noté $P_A(B)$ tel que :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

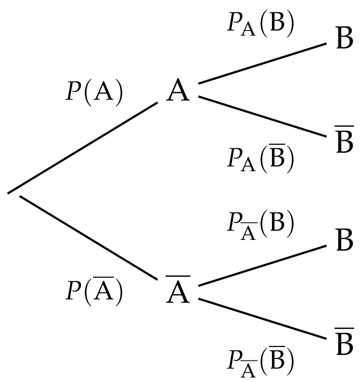
On a alors : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$

Formule des probabilités totales
Si A_1, A_2,...,A_n forment une partitions de Ω (2 à 2 incompatibles et leur union forme Ω), alors pour tout événement B, on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + \cdots + P(A_n) P_{A_n}(B)$$

Représentation par un arbre pondéré

Le cas le plus fréquent correspondond à la partition la plus simple (A et $\overline{A}$). Si on connaît les probabilité de B et $\overline{B}$ par l'intermédiare de A et $\overline{A}$, on a l'arbre suitvant :

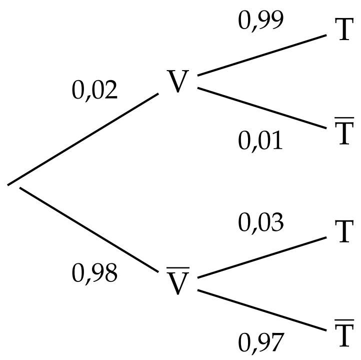


- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
  $P(\mathrm{A}) \times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
  $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) + P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B}) = 1$
- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.
  $P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A})P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) + P(\overline{\mathrm{A}})P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})$

Exemple : Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».



- Quelle est la probabilité que le test soit positif

  $P(\mathrm{T}) = 0,02 \times 0,99 + 0,98 \times 0,03 = 0,0492$
- Quelle est la probabilité que la personne soit contaminée sachant que le test est positif :

  $$P_{\mathrm{T}}(\mathrm{V}) = \frac{P(\mathrm{T} \cap \mathrm{V})}{P(\mathrm{T})} = \frac{0,02 \times 0,99}{0,0492} = 0,4024$$

3 Indépendance de deux événements

Deux événements A et B sont indémendants si et seulement si :

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = P(\mathrm{B}) \quad \Leftrightarrow \quad P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B})$$

4 Loi binomiale

- On appelle épreuve de Bernoulli toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraire l'une de l'autre)
- On appelle schéma de Bernoulli toute répétition d'épreuves de Bernouilli identiques et indépendantes

Étant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès S est p et le schéma de Bernoulli consistant à répéter n fois de manière indépendante cette épreuve.
Si on note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès S, la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p et est notée $\mathscr{B}(n; p)$.

- Probabilité d'obtenir k succès : $P(\mathrm{X} = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- Espérance de X : $E(\mathrm{X}) = np$
- Variance et écart-type de X : $V(\mathrm{X}) = np(1-p)$; $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{np(1-p)}$

Chapitre 11

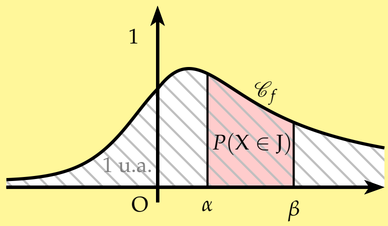
Lois à densité. Loi normale

1 Lois à densité

1.1 Généralités

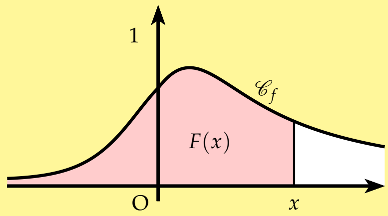
Définition 7 : On appelle **densité de probabilité** d'une variable aléatoire continue X, la fonction f continue et positive sur un intervalle I ($[a; b]$, $[a; +\infty[$ ou $\mathbb{R}$) telle que :

- $P(\mathrm{X} \in \mathrm{I}) = \displaystyle\int_{(\mathrm{I})} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$
- Pour tout intervalle $\mathrm{J} = [\alpha, \beta]$, on a :
  $P(\mathrm{X} \in \mathrm{J}) = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,\mathrm{d}t$



- La fonction F définie par : $F(x) = P(X \leqslant x)$ est appelée la **fonction de répartition** de la variable X

$$F(x) = \int_{\substack{a\\-\infty}}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$



- L'espérance mathématique d'une variable aléatoire continue X, de densité f sur I, est :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_{(\mathrm{I})} t\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

1.2 Loi uniforme

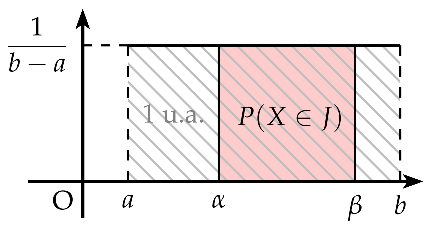
Définition 8 : X suit une loi uniforme sur $\mathrm{I} = [a, b]$, alors :

$$f(t) = \frac{1}{b-a}$$

Pour tout intervalle $\mathrm{J} = [\alpha, \beta]$ inclus dans I, on a :

$$P(\mathrm{X} \in \mathrm{J}) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} = \frac{\text{longueur de J}}{\text{longueur de I}}$$

La probabilité est proportionnelle à la longueur de l'intervalle.



1.3 Loi exponentielle

Définition 9 : X suit une loi exponentielle de paramètre réel λ alors :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

On a les relations suivantes

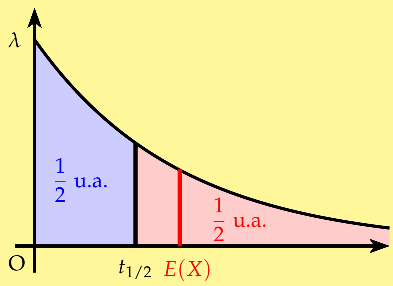
- La fonction de répartition : $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
- $P(X \leqslant a) = 1 - e^{-\lambda a}$ et $P(X \geqslant a) = e^{-\lambda a}$
- $P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

Théorème 1 : La loi exponentielle est une loi **sans mémoire**

$$\forall t > 0 \text{ et } h > 0 \quad \text{on a} \quad P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + h) = P(X \geqslant h)$$

Théorème 2 : X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors :

- l'espérance : $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$
- La demi vie : $t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$
- $E(X) = \dfrac{t_{1/2}}{\ln 2} \simeq 1,44\, t_{1/2}$



2 La loi normale

2.1 La loi normale centrée réduite

Définition 10 : On appelle densité de probabilité de Laplace-Gauss, la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

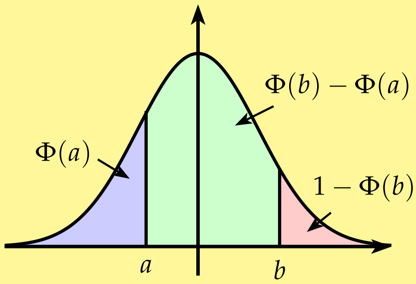
X suit une loi normale centrée réduite, $\mathcal{N}(0,1)$, si sa densité de probabilité est égale à la fonction φ.

Sa fonction de répartition Φ vaut : $\Phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$

L'espérance de X vaut 0 et son écart-type 1 d'où $\mathcal{N}(0,1)$

Théorème 3 : X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors pour tous réels a et $b > a$ on a :

- $P(X \leqslant a) = \Phi(a)$
- $P(X \geqslant b) = 1 - \Phi(b)$
- $P(a \leqslant X \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
- $P(X \leqslant -|a|) = 1 - \Phi(|a|)$



Théorème 4 : X est une variable aléatoire qui suit un loi normale centrée réduite. Soit $\alpha \in]0;1[$, il existe un **unique** réel **strictement positif** u_α tel que :

$$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$$

Il est bon de retenir les valeurs de $u_{0,05}$ et $u_{0,01}$:

- $P(-1.96 \leqslant X \leqslant 1.96) = 0,95$
- $P(-2.58 \leqslant X \leqslant 2.58) = 0,99$

2.2 La loi normale générale

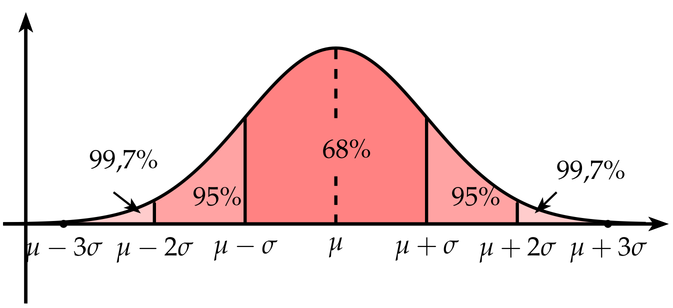
Définition 11 : Changement de variable

X suit une loi normale de paramètres $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors :

$Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

On a alors : $\mathrm{E}(X) = \mu$ et $\mathrm{V}(X) = \sigma^2$

On obtient les intervalles caractéristiques :



2.3 Approximation normale d'une loi binomiale

Théorème 5 : Théorème de Moivre-Laplace

X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ et Z tel que :

$$Z = \frac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Pour tous nombres a et b tels que $a < b$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$$

Conditions de l'approximation d'une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ par une loi normale $\mathscr{N}\left[np, np(1-p)\right]$

$$n \geqslant 30, \quad np \geqslant 5 \quad \text{et} \quad n(1-p) \geqslant 5$$

⚠ Faire la correction de continuité : $P(7 \leqslant X \leqslant 15) = P_N(6,5 \leqslant X \leqslant 15.5)$

Chapitre 12

Statistiques

1 Intervalle de fluctuation

Si la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ et si l'on se trouve dans les conditions de l'approximation normale de la loi binomiale ($n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$), on définit alors l'**intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %** par :

$$I_n = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \ ; \ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

Cette intervalle peut éventuellement être simplifié par :

$$J_n = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \ ; \ p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

2 Prise de décision

Soit f_{obs} la fréquence d'un caractère observée d'un échantillon de taille n d'une population donnée. On suppose que les conditions de l'approximation normale de la loi binomiale sont remplies : $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.

Hypothèse :
La proportion du caractère étudié dans la population est p.

Soit I_n l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.
- Si $f_{\text{obs}} \in I_n$; on ne peut rejeter l'hypothèse faite sur p.
- Si $f_{\text{obs}} \notin I_n$; on rejete l'hypothèse faite sur p.

3 Estimation - Intervalle de confiance

Pour des raisons de coût et de faisabilité, on ne peut étudier un certain caractère sur l'ensemble d'une population. La proportion p de ce caractère est donc inconnue.

On cherche alors à estimer p à partir d'un échantilon de taille n. On calcule alors la fréquence f_{obs} des individus de cet échantillon ayant ce caractère.

On observe la fréquence f_{obs} sur un échantillon de taille n. On appelle **intervalle de confiance de 95%** l'intervalle :

$$\left[f_{obs} - \frac{1}{\sqrt{n}} \ ; \ f_{obs} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Si l'on souhaitre encadrer p dans un intervalle de longueur a, on doit avoir : $n \geqslant \dfrac{4}{a^2}$

Chapitre 13

Géométrie dans l'espace. Vecteurs et produit scalaire.

1 Relations entre droites et plans

Deux droites peuvent être parallèles, sécantes ou non coplanaires.
Une droite et un plan peuvent être parallèles ou sécants.
Deux plans peuvent être parallèles ou sécants

2 Parallélisme

Théorème du toit : Si deux droites d_1 et d_2 sont deux parallèles contenues respectivement dans deux plans sécants $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ en une droite Δ alors la droite Δ est parallèle aux droites d_1 et d_2.

Plans parallèles : Un plan $\mathscr{P}$ coupe deux plans parallèles $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ en deux droites d_1 et d_2 parallèles.

3 Orthogonalité

On dit que deux droites, d_1 et d_2 sont **perpendiculaires** si, et seulement si, d_1 et d_2 sont **sécantes** en angle droit.
On dit que deux droites, d_1 et d_2 sont orthogonales si, et seulement si, il existe une parallèle Δ à d_1 qui est perpendiculaire a la seconde.
On ecrit indistinctement : $d_1 \perp d_2$.

Droite et plan orthogonaux : Une droite Δ est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, il existe deux droites sécantes, d_1 et d_2 de $\mathscr{P}$ en un point I perpendiculaire à Δ.
Δ est alors orthogonale à toute droite du plan $\mathscr{P}$

4 Vecteurs dans l'espace

On étend la notion de vecteur du plan a l'espace. Les definitions et propriétés du plan restent valables dans l'espace :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad$ ABDC est un parallélogramme
- On définit l'addition de deux vecteurs a l'aide de la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- On définit le produit d'un vecteur par un réel par un vecteur de même direction $\lambda\vec{u}$

Colinéarité

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{R}, \ \vec{v} = k\vec{u}$
- A, B, C alignés $\quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{R}, \ \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$
- (AB) // (CD) $\quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{R}, \ \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$

5 Coplanarité

Un plan $\mathscr{P}$ est défini par un un point A et un couple de vecteurs ($\vec{u}$,$\vec{v}$) appelés vecteurs directeurs de $\mathscr{P}$.
Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Vecteurs et points coplanaires

- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coplanaires $\quad \Leftrightarrow \quad \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \ \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$
- A, B, C, D coplanaires $\quad \Leftrightarrow \quad \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \ \overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

Remarque : il faut alors résoudre avec les coordonnées un système de trois équations a deux inconnues.

6 Dans un repère

Dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on détermine un point ou un vecteur par trois coordonnées : l'abscisse, l'ordonnée et la cote.

On obtient les relations identiques au plan :

- $\overrightarrow{AB} \ (x_B - x_A \ ; \ y_B - y_A \ ; \ z_B - z_A)$
- I milieu de [AB] : $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} \ ; \ \dfrac{y_A + y_B}{2} \ ; \ \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A))^2}$

7 Représentation paramétrique d'une droite et d'un plan

Soit une droite d passant par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$, on appelle **représentation parametrique** de la droite d, le système d'équations paramétriques suivant :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Soit un plan $\mathscr{P}$ passant par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(\alpha, \beta, \gamma)$, on appelle **représentation paramétrique** du plan $\mathscr{P}$, le système d'équations paramétriques suivant :

$$\begin{cases} x = x_A + at + \alpha s \\ y = y_A + bt + \beta s \\ z = z_A + ct + \gamma s \end{cases} \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2$$

8 Produit scalaire

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par l'une des trois relations suivantes :

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Propriétés :
Le produit scalaire est :
- commutatif : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- bilinéaire : $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab\, \vec{u} \cdot \vec{v}$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$.
Le signe dépend du sens des deux vecteurs.

On appelle $\theta = \widehat{BAC}$, on a alors :

- Si $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$ alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0$
- Si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, ABC est alors rectangle en A
- Si $\theta > \dfrac{\pi}{2}$ alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0$.

9 Équation cartésienne d'un plan

Le vecteur $\vec{n}$ est **normal** au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

Un plan $\mathscr{P}$ est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}$. Tout point M du plan $\mathscr{P}$ vérifie :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n} = 0$$

Théorème : Une droite Δ est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, deux droites sécantes de $\mathscr{P}$ sont perpendiculaires à Δ.

Théorème : Deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont perpendiculaires si, et seulement si, $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

Équation d'un plan : l'équation cartésienne d'un plan $\mathscr{P}$ est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad a, b, c \text{ non tous nuls}$$

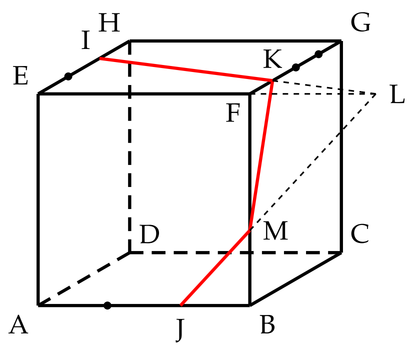
Le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ est alors normal au plan $\mathscr{P}$

10 Section d'un cube par un plan

- L'intersection, lorsqu'elle existe, d'une face par le plan (IJK) est un segment
- Une droite doit être tracée dans un plan contenant la face du cube
- Si deux points M et N du plan (IJK) sont sur une face, on relie M et N, cela donne l'intersection de (IJK) et de cette face
- La section du cube par le plan (IJK) est un polygone.

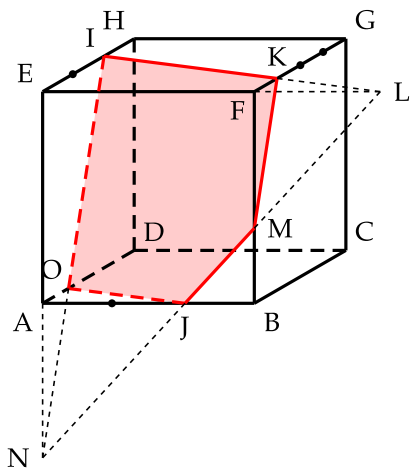
Dans notre construction :

- On trace [IK] en rouge qui est l'intersection du plan (IJK) avec la face du haut EFGH.
- On ne peut pas relier J à I ou K car ces segments ne sont pas sur une face du cube.
- On cherche l'intersection de (IJK) avec la face avant ABFE. Pour cela, on détermine l'intersection de la droite (IK) avec la droite (EF) qui contient l'arête [EF] appartenant aux faces EFGH et ABFE. On note L leur point d'intersection. Comme L ∈ (IK) donc $L \in$ (IJK).
- Comme L ∈ (EF), donc L appartient au plan (EFB) contenant la face ABFE. On trace alors la droite (JL) dans le plan (EFB) qui coupe [FB] en M. Comme M ∈ (JL), M ∈ (IJK).
- Ainsi [JM] et [KM] constituent les intersections du plan (IJK) avec les faces avant ABFE et de droite BCGF. On trace ces segments en rouge



On réitère cette opération pour la face gauche ADHE et la face du dessous ABCD :

- On détermine l'intersection de la droite (MJ) avec la droite (AE) qui contient l'arête [AE] appartenant aux faces ADHE et ABFE. On note N leur point d'intersection. Comme $N \in (MJ)$ donc $N \in (IJK)$.
- Comme $N \in (AE)$, donc N appartient au plan (EAD) contenant la face ADHE. On trace alors la droite (NI) dans le plan (EAD) qui coupe [AD] en O. Comme $O \in (NI)$, $O \in (IJK)$.
- Ainsi [OI] et [OJ] constituent les intersections du plan (IJK) avec les faces de gauche ADHE et de dessous ABCD. On trace ces segments en rouge et en pointillé car ces segments sont sur des faces cachées.
- La section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) est le pentagone IKMJO.

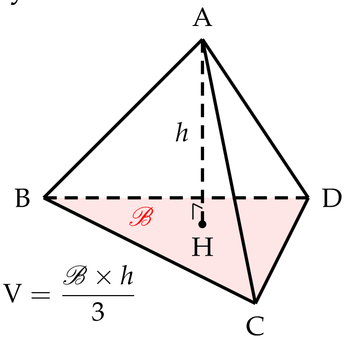


Remarque : Comme les faces EFGH et ABCD dont parallèles. Le plan (IJK) coupe ces faces en des segments parallèles. Il en est de même pour les faces BCGH et ADHE. On a donc :

$$(IK) \,//\, (OJ) \quad \text{et} \quad (KM) \,//\, (IO)$$

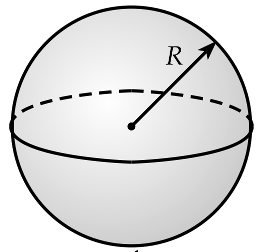
11 Volume d'une pyramide et d'une sphère

- Pyramide



$$V = \frac{\mathscr{B} \times h}{3}$$

- Sphère



$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$