Suite arithmétique

1) Une suite arithmétique (u_n) est définie par :
   - Un premier terme : u_0 ou u_p
   - $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$ où r est la raison de (u_n). (ou à partir de p si (u_n) commence à u_p)
2) Une suite **est** arithmétique de raison r ssi la différence de deux termes consécutifs est constante et vaut r :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = r$$
3) L'expression de u_n en fonction de u_0 ou u_p est :
$$u_n = u_0 + n\,r \quad \text{ou} \quad u_n = u_p + (n-p)\,r$$

Somme des termes d'une suite arithmétique

- Somme des n premiers entiers naturels :
$$1 + 2 + 3 \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$
- Généralement pour la somme des premiers termes :
$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$
$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$
$(n-p+1)$ correspond aux nbre de termes de u_p à u_n

Exemple : $S = 8 + 13 + 18 + \cdots + 2013$
$$S = \underbrace{\left(\frac{2013-8}{5} + 1\right)}_{\text{Nbre de termes}} \times \frac{8 + 2013}{2} = 406\,221$$

Suite géométrique

1) Une suite géométrique (v_n) est définie par :
   - Un premier terme : v_0 ou v_p
   - $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n \times q$ où q est la raison de (v_n). (ou à partir de p si (v_n) commence à v_p)
2) Une suite **est** géométrique de raison $q \neq 0$, de termes non nuls, ssi le quotient de deux termes consécutifs est constant et vaut q :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{v_{n+1}}{v_n} = q$$
3) L'expression de v_n en fonction de v_0 ou v_p est :
$$v_n = v_0 \times q^n \quad \text{ou} \quad v_n = v_p \times q^{n-p}$$

Pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique

On prend un contre-exemple avec 3 termes consécutifs.
On montre par exemple que :
$$u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$$

Suites

Une suite numérique est une fonction définie de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$:
$$\begin{aligned}(u_n)\ :\ \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ n &\longmapsto u_n\end{aligned}$$
- u_n désigne le terme général de la suite.
- (u_n) désigne la suite dans sa globalité.
- La représentation d'une suite est un nuage de points.

Somme des termes d'une suite géométrique $q \neq 1$

- Somme des n premières puissance de q :
$$1 + q + q^2 \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$
- Généralement pour la somme des premiers termes :
$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$
$$v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n = v_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$
$(n-p+1)$ correspond aux nbre de termes de v_p à v_n

Pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique

On prend un contre-exemple avec 3 termes consécutifs non nuls.
On montre par exemple, pour v_0 et v_1 non nuls, que :
$$\frac{v_2}{v_1} \neq \frac{v_1}{v_0}$$

Variation d'une suite géométrique

- Si $q > 1$, la suite (q^n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$, la suite (q^n) est décroissante.

Pour une suite géométrique quelconque, on prendra en compte le premier terme v_0.

- Si $v_0 > 0$, (v_n) et (q^n) ont même variation.
- Si $v_0 < 0$, (v_n) et (q^n) ont des variations contraires

⚠ Si $q = 1$ ou $q = 0$, la suite (q^n) est constante.
Si $q < 0$, la suite (q^n) n'est pas monotone.

Comportement de la suite q^n

On a les limites suivantes selon les valeurs de q :
- si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ ROC
- si $q = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
- si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- si $q \leqslant -1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ n'existe pas

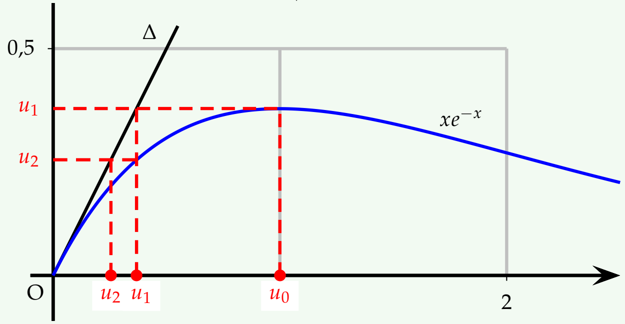
Étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$

- **Variation** d'une suite d'une suite : **3 méthodes**
  1) On étudie le signe de la quantité : $u_{n+1} - u_n$.
     Si la quantité est $\geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$) la suite est croissante (resp. décroissante).
  2) Si tous les termes sont > 0, on compare la quantité $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
     Si la quantité est $\geqslant 1$ (resp. $\leqslant 1$), la suite est croissante (resp. décroissante).
  3) Raisonnement par récurrence : pour montrer que la suite est croissante, on montrera : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

- **Représentation** des premiers termes de la suite :

  Méthode : On trace la courbe de la fonction associée $\mathscr{C}_f$ et la droite Δ d'équation $y = x$ pour reporter les termes sur la droite des abscisses.

  Exemple : Soit la suite $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n\, e^{-u_n}$.



- Pour trouver la forme explicite de u_n, on passe par une suite auxiliaire, donnée dans l'énoncé, qui est soit arithmétique soit géométrique.
  Parmi ces suites, on a les suites arithmético-géométriques : $u_{n+1} = au_n + b$

Exemple : $u_0 = 1$ $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2n - 1$. On pose $v_n = u_n - 4n + 10$
Montrer que la suite (v_n) est géométrique

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4(n+1) + 10 = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1 - 4n - 4 + 10 = \frac{1}{2}u_n - 2n + 5$$
$$= \frac{1}{2}(u_n - 4n + 10) = \frac{1}{2}v_n$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n,$ la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 10 = 11$

$$v_n = 11\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow u_n = v_n + 4n - 10 = 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$$

Calculs des sommes. Quelques variantes.

Exemple : (extrait Pondichéry 2010)

Soit : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{21}{4}$

Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$

Méthode : On sépare les termes u_n en deux suites : $u_n = v_n + t_n$

- $v_n = \dfrac{25}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de 1er terme $v_0 = \dfrac{25}{4}$
- $t_n = \dfrac{3}{2}n - \dfrac{21}{4}$, suite arithmétique de raison $\dfrac{3}{2}$ et de 1er terme $t_0 = -\dfrac{21}{4}$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= (v_0 + t_1) + (v_1 + t_1) + (v_2 + t_2) + \cdots + (v_n + t_n) \\ &= (v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n) + (t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_n) \\ &= \frac{25}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} + (n+1) \times \frac{-\frac{21}{4} + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}}{2} = \text{ etc.} \end{aligned}$$

Dans le même état d'esprit

- Métropole 2013 : Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ où $u_k = 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^k + k$
- Antilles sept 2008 : Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ où $u_k = 12\left(\dfrac{1}{5}\right)^k + 1$

  On a alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{(n+1)\text{ fois}} = n + 1$

Autres méthodes

Il existe en terminale S deux autres méthodes pour calculer une somme qui ne se ramènent pas aux sommes des suites usuelles :

- Le raisonnement par récurrence : Antilles sept 2010.
- Sommes télescopiques : Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ où $u_k = \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k}$

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \\ &= \left(\cancel{\frac{1}{2}} - 1\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} + \cancel{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n+1} - 1 \end{aligned}$$