

Paradoxe de Achille et la tortue

1 Le paradoxe

Le paradoxe d'Achille et de la tortue, formulé par Zénon d'Élée, dit qu'un jour, le héros grec Achille a disputé une course à pied avec le lent reptile. Comme Achille était réputé être un coureur très rapide, il avait accordé gracieusement à la tortue une avance de cent mètres.

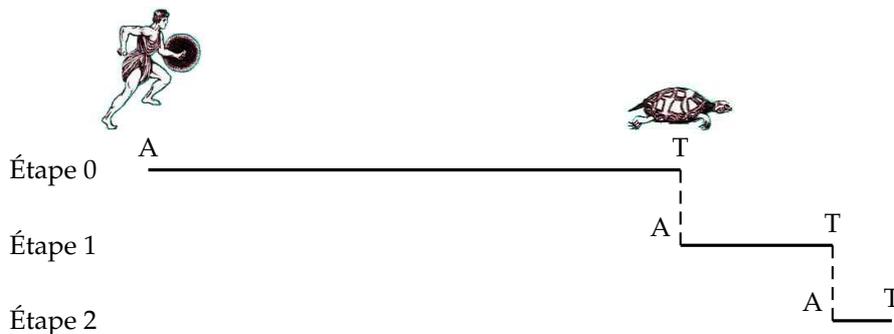
L'argument exposé par Zénon est que Achille ne peut rattraper la tortue car si la tortue a de l'avance sur Achille, celui-ci ne peut jamais la rattraper, quelle que soit sa vitesse ; car pendant qu'Achille court jusqu'au point d'où a démarré la tortue, cette dernière avance, de telle sorte qu'Achille ne pourra jamais annuler l'avance de l'animal.

2 Résolution

Achille ne peut rattraper la tortue qu'après une infinité d'étapes. L'erreur consiste à dire que cette infinité d'étapes se fait en un temps infini.

Pour simplifier la résolution prenons les valeurs suivantes : Achille se déplace à 10 ms^{-1} , ce qui en fait un très bon sprinter de 100 m, et la tortue à $0,1 \text{ ms}^{-1}$ soit une vitesse 100 fois inférieure à celle de Achille.

Schématisons les étapes suivantes



À chaque étape la tortue effectue une distance 100 fois moindre que Achille car elle va 100 fois moins vite. À chaque étape le temps mis par Achille pour effectuer la distance AT est 100 fois moindre qu'à la précédente. Le temps t_n écoulé jusqu'à la n ième étape est :

$$t_n = 10 + \frac{10}{100} + \frac{10}{100^2} + \cdots + \frac{10}{100^{n-1}}$$

t_n est donc la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{100}$ et de premier terme 10. On a donc :

$$t_n = 10 \times \frac{1 - \frac{1}{100^n}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{1000}{99} \left(1 - \frac{1}{100^n} \right)$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{100^n} = 0$ car $-1 < \frac{1}{100} < 1$

Par somme et produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \frac{1000}{99} \simeq 10,1010$

Pour effectuer une infinité d'étapes, Achille met un peu plus de 10,10 s. Achille rattrape bien la tortue ce que personne avait douté !

3 Conclusion

La notion de limite de suite permet d'expliquer facilement le paradoxe qu'une infinité d'étapes peut se faire en un temps fini.

On pourrait transposer ce paradoxe à de nombreux phénomènes usuels. Par exemple le lâcher d'une balle qui rebondit à 80 % de sa hauteur initiale. Elle effectuera une infinité de rebonds en un temps fini.