Limite d'une suite par des inégalités successives

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} + 4$.

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 16$.

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 16$

Initialisation : Pour $n = 0$: $u_0 = 0$ et $u_1 = 4$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 16$.
La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$,
supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 16$, montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 16$.

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 16 \overset{\sqrt{\ }\nearrow}{\Rightarrow} 0 \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{16} \overset{\times 3}{\Rightarrow} 0 \leqslant 3\sqrt{u_n} \leqslant 3\sqrt{u_{n+1}} \leqslant 12$$
$$\overset{+4}{\Rightarrow} 0 \leqslant 3\sqrt{u_n} + 4 \leqslant 3\sqrt{u_{n+1}} + 4 \leqslant 16 \Rightarrow 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 16$$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 16$.
La suite est alors croissante et comprise dans l'intervalle $[0\,;\,16]$.

2) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 16 donc d'après le théorème des suites monotones, la suite est convergente vers ℓ et $0 \leqslant \ell \leqslant 16$.

3) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 16 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4}(u_n - 16)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$,
$$16 - u_{n+1} = 12 - 3\sqrt{u_n} = \frac{(12 - 3\sqrt{u_n})(12 + 3\sqrt{u_n})}{12 + \sqrt{u_n}} = \frac{144 - 9u_n}{12 + 3\sqrt{u_n}} = \frac{9(16 - u_n)}{12 + \sqrt{u_n}}$$

$$\text{or } \sqrt{u_n} \geqslant 0 \overset{+12}{\Leftrightarrow} 12 + \sqrt{u_n} \geqslant 12 \overset{\uparrow -1}{\Leftrightarrow} \frac{1}{12 + \sqrt{u_n}} \leqslant \frac{1}{12}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, \quad 16 - u_{n+1} \leqslant \frac{9(16 - u_n)}{12} \Leftrightarrow 16 - u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}(16 - u_n).$$

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 16 - u_n \leqslant 16\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
En déduire alors la limite de la suite (u_n).

On applique l'inégalité précédente et de proche en proche (on peut éventuellement faire une récurrence :

$$16 - u_n \leqslant \frac{3}{4}(16 - u_{n-1}) \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^2 (16 - u_{n-2}) \leqslant \cdots \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n (16 - u_0)$$

Comme $u_0 = 0$, obtient alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 16 - u_n \leqslant 16\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$, par somme et produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 16$.

Remarque : On aurait pu utiliser le théorème du point fixe. (u_n) convergente et f continue sur $[0, 16]$ alors la limite ℓ vérifie l'équation $x = f(x)$

$x = 3\sqrt{x} + 4 \iff x - 4 = 3\sqrt{x} \overset{x\geqslant 4}{\iff} (x-4)^2 = 9x \iff x^2 - 8x + 16 = 9x$
$\iff x^2 - 17x + 16 = 0$

$x_1 = 1$ racine évidente (non retenue), $P = 16$ donc $x_2 = 16$.

4) Montrer qu'à partir de $n = 40$, (u_n) se situe à moins de 2×10^{-4} de sa limite.

$16\left(\dfrac{3}{4}\right)^n < 2 \times 10^{-2} \iff \left(\dfrac{3}{4}\right)^n < 1,25 \times 10^{-5} \overset{\ln\nearrow}{\iff} n \ln\dfrac{3}{4} < \ln(1,25 \times 10^{-5})$

$\overset{\ln 0,75<0}{\iff} \quad n > \dfrac{\ln(1,25 \times 10^{-5})}{\ln 0,75} \iff n > 39,24 > 40$

On aurait pu éventuellement calculer : $16\left(\dfrac{3}{4}\right)^{40} \approx 1,6 \times 10^{-4} < 2 \times 10^{-4}$.