Limites de suites

"Contretemps" :
les formes indéterminées

$+\infty - \infty,\ 0 \times \infty,\ \dfrac{0}{0},\ \dfrac{\infty}{\infty}$

Il faut savoir les identifier puis les lever.

Théorèmes d'existence de la limite

- Une suite croissante **et** majorée par un réel M **converge** vers un réel $\ell \leqslant M$
- Une suite décroissante **et** minorée par un réel m **converge** vers un réel $\ell \geqslant m$

⚠ Si la limite existe, elle est unique

Ces théorèmes ne sont pas effectifs

⚠ À connaître

Les limites de référence.

Notamment

$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ si $q > 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$ si $q = 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ si $-1 < q < 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ n'existe pas si $q \leqslant -1$

Soit (u_n) une suite récurrente

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, et si f est continue en ℓ alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$

Feuille de route

En général, dans le cas des suites récurrente d'ordre 1, on utilise un théorème d'existence de la limite ℓ.

On dispose alors d'une méthode explicite pour déterminer la valeur de ℓ. On résout $f(x) = x$, ℓ appartient alors à l'ensemble solution de cette équation.

- La suite est explicite : dans ce cas, on passe à la limite directement
- **Autres outils**
  1) Le théorème des gendarmes pour prouver la convergence.
  2) Le théorème de comparaison qui permet de montrer que la suite diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Si une suite est croissante et non majorée, elle diverge vers $+\infty$
- Si une suite est décroissante et non minorée, elle diverge vers $-\infty$

Détermination explicite de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Les théorèmes ou méthodes permettent de conclure.

Vrai ou faux : l'intuition, ce faux ami !

1) Si une suite n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$.
Faux : contre-exemple $(-2)^n$

2) Si une suite n'est pas minorée, alors elle tend vers $-\infty$.
Faux : contre-exemple $(-2)^n$

3) Si une suite est strictement croissante, alors elle tend vers $+\infty$
Faux : contre-exemple $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ ou $(-0,5^n)$ ou $(-e^{-n})$

4) Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle n'est pas majorée.
Vrai. On revient à la définition de la divergence vers ∞. Pour tout entier A, aussi grand soit-il, il existe un rang N au delà duquel tous les termes sont dans l'intervalle $]A\,;+\infty[$.

5) Si une suite tend vers $+\infty$ alors, elle est croissante.
Faux : contre-exemple $(n+(-1)^n)$ ou $(n+\cos n)$.
Ce sont des suites qui oscillent mais qui restent supérieures à une suite qui tend vers $+\infty$. Par exemple $n+(-1)^n \geqslant n-1$ ou $n+\cos n \geqslant n-1$.

6) Toute suite bornée est convergente (c'est à dire possède une limite réelle).
Faux : contre-exemple $(-1)^n$. Cette suite oscille sans se stabiliser.

7) Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
Vrai : voir ROC.

Vrai ou faux : au bac !

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.
On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -\dfrac{2}{u_n}$.
Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1) Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.
Faux : si la suite (u_n) tend vers 0, la suite (v_n) diverge.
Contre-exemple : $u_n = 0,5^n$

2) Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.
Vrai : si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 2 \overset{\frac{1}{x}}{\Rightarrow} \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2} \overset{\times(-2)}{\Rightarrow} -\dfrac{2}{u_n} \geqslant -1$

3) Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.
Faux : si (u_n) est décroissante alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est croissante et donc $\left(-\dfrac{2}{u_n}\right)$ est décroissante.
Contre-exemple : $u_n = -n-1$ décroissante et $v_n = -\dfrac{2}{-n-1} = \dfrac{2}{n+1}$ décroissante.

4) Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.
Faux : une suite qui diverge ne tend pas nécessairement vers l'infini, elle peut ne pas avoir de limite.
Contre-exemple : $u_n = (-1)^n$ diverge et $v_n = -\dfrac{2}{(-1)^n}$ diverge aussi.