Historique

L'objectif d'un raisonnement par récurrence est de prouver qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour une infinité d'entiers naturels $n \geqslant n_0$, où n_0 désigne un entier naturel fixé.
Ce raisonnement est rendu possible du fait même de la structure discrète de $\mathbb{N}$ et donc de l'existence de la notion de « successeur ».
La première apparition explicite du raisonnement par récurrence semble remonter à Blaise Pascal dans son traite autour du triangle qui porte son nom. Mais c'est le mathématicien Henri Poincaré (1854-1912) qui l'a formalisé et a donné à cette méthode très puissance de raisonnement un contexte rigoureux et indiscutable.

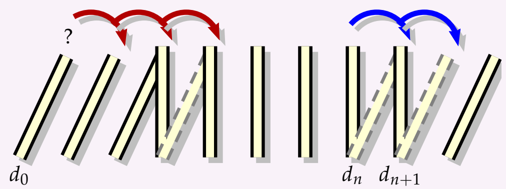
Quand peut-on utiliser un raisonnement par récurrence ?

1) Pour déterminer le terme général d'une suite numérique ou établir une formule explicite de somme (somme des carrés, des cubes par exemple)
2) Pour démontrer qu'une suite est minorée, majorée, bornée ou encore monotone.
3) Pour prouver un critère de divisibilité.
4) Pour prouver une inégalité non-triviale (l'inégalité de Bernoulli par exemple)
5) Enfin, le raisonnement par récurrence sous-tend quelques démonstration de question (**ROC**)

Le raisonnement par récurrence est parfois délicat à manipuler :

- Il faut savoir identifier qu'il s'impose car dans le cadre du BAC, ce n'est pas toujours suggéré. Il faut y penser mais se garder de voir des récurrences partout.
  Un contexte propice au raisonnement par récurrence est celui des suites récurrentes d'ordre 1.
- L'étape d'hérédité n'est pas toujours facile à réaliser.
  La stratégie dépend de la forme de la propriété mais dans tous les cas, on doit partir de quelque chose d'acquis. Le plus souvent, il s'agit de l'hypothèse de récurrence (HR). Qu'on débute par elle ou qu'on l'injecte en cours de raisonnement, HR doit toujours avoir été utilisée.

Le raisonnement par récurrence



Le premier domino tombe.
Amorce

Si le n^e domino tombe, il fait tomber le $(n+1)^e$.
Propagation

Les grandes étape du raisonnement par récurrence

- **Initialisation**
  On commence **toujours** par s'assurer que la propriété à démontrer est vérifiées au rang initial n_0.
  Dans le cas contraire, inutile d'aller plus loin, la propriété est fausse dans le cadre de l'énoncé.

D'autres raisonnements par récurrence existent.

- Certains sont hors programme comme la récurrence finie, la récurrence descendante ou transfinie.
- En revanche, on présente parfois au lycée la récurrence forte. Cette dernière consiste à booster l'hypothèse de récurrence par rapport à une récurrence simple en supposant la propriété à démontrer vraie jusqu'à un rang fixé (i.e de n_0 à n).

- **Hérédité**
  Il s'agit de prouver que le caractère mathématique se transmet à la génération suivante.
  On fait une hypothèse de récurrence (HR) qui consiste à supposer que la propriété est vraie pour un entier naturel **fixé** n tel que $n \geqslant n_0$
  Sous cette hypothèse, il 'agit alors de montrer que la propriété rest vraie au rang suivant $(n+1)$.
- **Conclusion :**
  Si $P(n_0)$ est vraie et $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ alors, on a montré par récurrence que : $\forall n \geqslant n_0, \quad P(n)$ est vraie.

L'initialisation est indispensable !

L'étape d'initialisation consiste en général en une simple formalité (souvent évidente) mais n'en reste pas moins indispensable pour rendre le raisonnement effectif.
En effet, l'hérédité qui est un processus avant tout mécanique nécessite une amorce pour s'appliquer de proche en proche (effet dominos).
Il existe de nombreux exemples de propriétés héréditaires et pourtant fausse.
Exemple : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 6^n + 1$ multiple de 5.
Cette propriété est héréditaire et pourtant fausse
(si $n = 1$, on a $6^1 + 1 = 7$ non multiple de 5)

ROC et raisonnement par récurrence

⚠ Ces propriétés sont en général précédées d'un prérequis indispensable à la netteté du raisonnement..

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (e^x)^n = e^{nx}$
2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(x^n) = n \ln x, \quad$ avec $\quad x > 0$.
3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi], \quad$ avec $\ z \neq 0$.
4) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \overline{z^n} = (\overline{z})^n$.
5) Inégalité de Bernoulli : soit $a \in \mathbb{R}$ et $a > 0$:
   $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1+a)^n \geqslant 1 + na$.

La récurrence sur le terrain - Quelques exemples

Exemple 1 - $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

- **Initialisation** : $n = 1$

  On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1$ et $\left(\dfrac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$

  $P(1)$ est vraie, la proposition est initialisée.

- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on suppose que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ est vraie. (HR)

  Montrons alors que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$: ordre $(n+1)$. (But)

  On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (k+1)^3 \overset{\text{HR}}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$

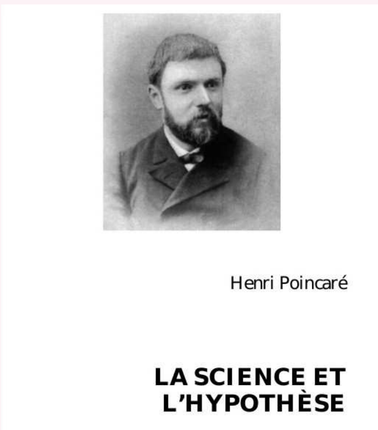
  $$= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4}{4}$$

  $$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2}{2}\right)^2$$

  $P(n+1)$ est vraie, la proposition est héréditaire.

- **Conclusion** : Par initialisation et hérédité, on a montré que :

  $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$



La récurrence sur le terrain - Quelques exemples

Exemple 2 - $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N},\ 3 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 8$

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 8$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1} = f(u_n)$.

La fonction associée f : $x \mapsto \sqrt{3x+1}$ est croissante sur $[-\frac{1}{3}\,;+\infty[$ car composée de deux fonctions croissantes. f ne change pas la relation d'ordre

- **Initialisation** : $n = 0$

  On a $u_0 = 8$ et $u_1 = \sqrt{24+1} = 5$ donc $3 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 8$

  $P(0)$ est vraie. La proposition est initialisée.

- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que $3 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 8$. (HR)

  Montrons alors que $3 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 8$. (But)

  D'après HR : $3 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 8 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(3) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(8)$

  $$\Leftrightarrow\ 3 \leqslant \sqrt{10} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$$

  $P(n+1)$ est vraie. La proposition est héréditaire.

- **Conclusion** : Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N},\ 3 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 8$

- **Interprétation** : On a montré

  $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$ donc (u_n) est décroissante

  $\forall n \in \mathbb{N},\ 3 \leqslant u_n \leqslant 8$ donc (u_n) est bornée par $[3\,;8]$. En particulier, (u_n) est minorée par 3.

  Qu'en déduire . . . La suite (u_n) converge vers $\ell \in [3\,;\,8]$

Exemple 3 - Inégalité de Bernoulli : $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a > 0\ \ (1+a)^n \geqslant 1 + na$

- **Initialisation** : $n = 0$

  On a $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0a = 1$ ainsi $(1+a)^0 \geqslant 1 + 0a$.

  $P(0)$ est vraie. La proposition est initialisée.

- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que $(1+a)^n \geqslant 1 + na$. (HR).

  Montrons alors que $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$. (But)

  D'après HR : $(1+a)^n \geqslant 1 + na \overset{\times(1+a)>0}{\Leftrightarrow} (1+a)(1+a)^n \geqslant (1+na)(1+a)$

  $$\Leftrightarrow\ (1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a + na^2 \geqslant 1 + (n+1)a \text{ car } na^2 > 0$$

  $P(n+1)$ est vraie. La proposition est héréditaire.

- **Conclusion** : Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a > 0,\ (1+a)^n \geqslant 1 + na$

- **Application** : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ si $q > 1$ (ROC)