

Limites de fonctions

Opérations sur les limites

EXERCICE 1

Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des polynômes suivants :

a) $P(x) = 5x^3 - 3x + 1$

b) $Q(x) = -2x^4 + x^2 + 3$

EXERCICE 2

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions rationnelles suivantes puis déterminer les limites aux bornes de leur ensemble de définition.

1) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{1 - x}$

3) $h(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

2) $g(x) = \frac{x + 2}{(x + 3)^2}$

4) $k(x) = 3x - 5 + \frac{2}{x + 2}$

EXERCICE 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ par : $f(x) = \frac{2x^2}{(1+x)(1-x)}$

- 1) Tracer cette fonction sur votre calculatrice. Conjecturer alors les limites en $-\infty$, -1 , 1 et $+\infty$. On prendra comme fenêtre $x \in [-4; 4]$ et $y \in [-10; 10]$ et comme graduations 1 sur l'axe (Ox) et 2 sur l'axe (Oy)
- 2) Démontrer ces conjectures.

Limite d'une fonction composée

EXERCICE 4

Déterminer les limites des fonctions suivantes au point d'abscisse demandé

1) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$ en $x = 5$

5) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x + 1}{x + 2}\right)$ en $+\infty$

2) $f(x) = \sqrt{-x^3 + x^2 + x}$ en $-\infty$

6) $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2}{1-x}}$ en $-\infty$

3) $f(x) = \sqrt{\frac{-x+1}{x^2+1}}$ en $-\infty$

4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en $x = 1$

7) $f(x) = \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$

EXERCICE 5

f est une fonction définie sur $] -5; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$

- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f[f(x)]$
- b) Trouver la forme algébrique de $f[f(x)]$ puis retrouver le résultat du a)

Algorithme

EXERCICE 6

Courbe asymptote

f et g sont les fonctions définies sur $] - 2, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 6}{2(x + 2)} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2$$

- 1) Tracer dans une même fenêtre de la calculatrice les courbes représentatives des fonctions f et g . Qu'observe-t-on pour les grande valeurs de x ?
- 2) a) Démontrer que pour tout $x > 2$: $g(x) - f(x) = \frac{4}{x + 2}$
 b) En déduire la limite de $g(x) - f(x)$ en $+\infty$.
 c) Étudier la position relative des courbes représentatives des fonction f et g .
- 3) On considère l'algorithme ci-contre
 - a) Expliquer le rôle de cet algorithme.
 - b) Quelle valeur de x , l'algorithme affiche-t-il lorsque l'on saisit $a = 0,01$?

Variables : x : entier a : réel
Entrées et initialisation
 | Lire a réel positif proche de 0
 | x prend la valeur -1
Traitement
 | **tant que** $\frac{4}{x + 2} > a$ **faire**
 | | x prend la valeur $x + 1$
 | **fin**
Sorties : Afficher x

Fonction catastrophe

EXERCICE 7

f est la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \frac{(x^{20} + 100)^2 - 10\,000}{x^{20}}$

- 1) A l'aide de votre calculette, déterminer les valeurs approchées de $f(x)$ pour des valeurs proche de 0. Recopier et remplir le tableau suivant :

x	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,01
$f(x)$							

- Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de f en 0 ?
- 2) En développant $(x^{20} + 100)^2$, trouver une expression simplifiée de $f(x)$.
 - 3) Déterminer alors la limite de la fonction f en 0.
 - 4) Comment expliquer cette différence de valeur entre le tableau de valeurs et la limite en 0.

Limites par comparaison

EXERCICE 8

Par un encadrement judicieusement choisi, déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{2 - \cos x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x \sin x$

EXERCICE 9**Asymptotes**

f est une fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x + \sin x}{x - 1}$

- 1) On a représenté ci-contre la fonction f .
Conjecturer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$ et les limites à gauche et à droite de 1.
- 2) a) Démontrer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ grâce à un encadrement.
b) Déterminer les limites à gauche et à droite de 1.
c) Interpréter graphiquement les limites obtenues.

