Courbe blanc-manger

On appelle courbe blanc-manger $\mathscr{C}_{bm}$, la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d(2^k x)}{2^k} \quad \text{où } \ d(x) \ \text{ est la distance de } x \text{ à l'entier le plus proche.}$$

On dit qu'une fonction g est T périodique si : $\forall x \in \mathbb{R}, \ g(x+T) = g(x)$.

On appelle E la fonction partie entière : si $n \leqslant x < n+1$, alors $\mathrm{E}(x) = n$.

Pour tracer les courbes demandées, on prendra un pas de $1/1000$.

Partie A : Étude de la fonction *d*

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \ 0 \leqslant d(x) \leqslant 0,5$.
2) Montrer que la fonction d est 1 périodique.
3) Proposer un algorithme permettant de tracer la fonction d pour $x \in [0,3]$.
4) Montrer que la fonction $x \mapsto d(2^k x)$, avec $k \in \mathbb{N}$, est $\dfrac{1}{2^k}$ périodique.
5) En déduire que la fonction f est 1 périodique.

Partie B : Étude de la fonction *f*

1) A l'aide de la limite de la somme des termes d'une suite géométrique que l'on précisera, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \ 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$
2) Écrire un programme permettant de tracer, sur un même écran, les fonction $d_k \ : \ x \mapsto \dfrac{d(2^k x)}{2^k}$, pour $k \in [\![0,4]\!]$ pour $x \in [0,1]$.
   On prendra comme fenêtre $X \in [0,1]$ et $Y \in [0,1]$. Qu'observe-t-on ?
3) Modifier le programme pour qu'il trace les fonction f_n sur un même écran pour $x \in [0,1]$ et $n \in [\![0,3]\!] \cup \{9\}$ avec : $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{d(2^k x)}{2^k}$.
4) Pourquoi peut-on dire que la fonction f est continue partout et qu'elle est dérivable nul part ?

Remarque : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d(2^k x)}{2^k} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d(2^k x)}{2^k}$.

Le nom de $\mathscr{C}_{bm}$ vient d'un dessert américain. En effet la forme de la courbe de f rappelle un pouding au lait d'amandes appelé "*blancmange*" en anglais.