Introduction à la fonction exponentielle

1 Introduction

De nombreux phénomènes physiques, biologiques, économiques ou autres sont modélisés par une fonction f **qui est proportionnelle** à sa dérivée f'.

Par exemple, le phénomène de désintégration des noyaux radioactifs, l'activité de désintégration à l'instant t est proportionnelle au nombre de noyaux à l'instant t : $N'(t) = kN(t)$

Nous allons ici nous intéresser à l'une des fonctions de ce type.

Plus particulièrement, que peut-on dire d'une **fonction qui serait égale à sa dérivée ?**

Nous connaissons déjà au moins une fonction égale à sa dérivée : la fonction nulle ! Mais cette fonction est sans intérêt. Notre objectif est d'en rechercher d'autres.

2 Théorie : de l'importance de la condition initiale

Supposons qu'il existe une fonction f, non nulle, definie et derivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $g = \lambda f$.
   Demontrer que : $g' = g$ sur $\mathbb{R}$.

2) Soit g une fonction verifiant aussi $g' = g$ sur $\mathbb{R}$.
   Que peut-on dire de : $f + g$?

3) Supposons maintenant qu'il existe une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant les conditions :

$$(P) \quad \begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

   a) On considere la fonction φ definie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = f(x)f(-x)$$

ROC Montrer que φ est une fonction constante égale a 1 sur $\mathbb{R}$.
En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ puis que la fonction f est strictement positive.

   b) Démontrer que si g est une fonction qui vérifie (P) alors $g = f$ sur $\mathbb{R}$.

ROC On pourra considerer la fonction h definie sur $\mathbb{R}$ par $h = \dfrac{f}{g}$.

Dans la suite, la fonction f est l'unique fonction satisfaisant les conditions : (l'unicité vient d'être montrée, l'existence sera montrée plus tard)

$$(P) \quad \begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$$