Bonus : relations fonctionnelles

Exercice 1

On se propose de déterminer toutes les fonctions f continue sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Soit f une fonction remplissant ces conditions. Soit $x \in \mathbb{R}$.

1) a) Démontrer que $f(0) = 0$ et que $f(-x) = -f(x)$.
   b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $f(nx) = nf(x)$
   c) Démontrer que pour tout entier naturel n, $f(-nx) = -nf(x)$.
   On a donc, pour tout entier relatif k, $f(kx) = kf(x)$.
   d) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, $f\left(\dfrac{1}{n}x\right) = \dfrac{1}{n}f(x)$.
   e) Démontrer que, pour tout nombre rationnel q, $f(q\,x) = q\,f(x)$.
   Soit : $f(1) = \lambda$. Démontrer que, pour tout nombre rationnel q, $f(q) = \lambda q$.
2) On admet que tout nombre réel x est la limite d'une suite de nombres rationnel. Démontrer que, pour tout réel x, on a $f(x) = \lambda x$
   On pourra poser : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x = \lim\limits_{n \to +\infty} q_n, \quad$ où $q_n \in \mathbb{Q}$.
   Quelles sont les fonctions f vérifiant les conditions énoncées ?

Exercice 2

On se propose de déterminer toutes les fonctions non nulle f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

On note S l'ensemble des fonctions f remplissant ces conditions.

1) a) Démontrer que f ne s'annule en aucun réel x non nul.
   On pourra raisonner par l'absurde.
   b) Démontrer que $f(1) = 1$. Démontrer que $f(-1)$ est égal soit à 1, soit à (-1).
   En déduire que f est soit paire, soit impaire.
   c) Démontrer que f est strictement positive sur $]0\,;+\infty[$.
2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \ln\left[f(e^x)\right]$.
   Démontrer que g est continue sur $\mathbb{R}$ et que g vérifie l'équation fonctionnelle de l'exercice 1. En déduire, grâce à la résolution de l'exercice 1, l'expression de $g(x)$ pour x réel, puis celle de $f(x)$ pour x réel strictement positif.
3) Déterminer toutes les fonctions f de l'ensemble S.