Étude d'une fonction

1 Limites

Somme

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. Ind.

Produit

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si g a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $f \times g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞	F. ind.	∞

Quotient

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	∞
Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0 **	0	∞	ℓ' **	∞
alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞	F. ind.	0	∞	F. ind.

Composition

Composition de deux fonctions.
Soit deux fonctions f, g. Soient a, b et c des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si} \quad \lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b} g(x) = c \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a} g\left[f(x)\right] = c$$

Fonction et suite

Soit une suite (u_n) définie par : $u_n = f(n)$. f est alors la fonction réelle associée à la suite (u_n). Soit a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$

$$\text{Si} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = a \quad \text{alors} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = a$$

1.1 Comparaison

f, g, et h sont trois fonctions définies sur l'intervalle $I =]b;+\infty[$ et ℓ un réel.

1) **Théorème des « Gendarmes »**
Si pour tout $x \in I$, on a : $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ **et si** :
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = \ell \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

2) **Théorème de comparaison**
Si pour tout $x \in I$ on a : $f(x) \geqslant g(x)$ **et si** :
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2 Continuité

Définition 1 Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I. Soit a un élément de I. On dit que la fonction f est **continue** en a si et seulement si :
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Fonctions continues : Toutes fonctions construites par somme, produit, quotient ou par composition à partir de fonctions élémentaires sont continues sur leur ensemble de définition.
C'est par exemple le cas pour les fonctions polynômes et rationnelles.

Si f est dérivable en a alors la fonction f est continue en a.
⚠ La réciproque est fausse.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit une fonction f définie et **continue** sur un intervalle $I = [a, b]$. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in I$ tel que $f(c) = k$. (c n'est pas nécessairement unique.

Soit une fonction f **continue et strictement monotone** sur $I = [a, b]$. Alors, pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution **unique** dans $I = [a, b]$

Si l'intervalle $I =]a, b[$ est ouvert, k doit alors être compris entre $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to b} f(x)$

Soit f défnie par $f(x) = x^3 + x - 3$
f est continue et strictement croissante sur I=[1 ;2] car f est dérivable sur I et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$.
De plus $f(1)$=-1 et $f(2)$=7. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1; 2]$.

Ci-contre un algorithme, utilisant le principe de **dichotomie**, permet de trouver une approximation de α à la précision de 10^{-6}.
On pose :

- A et B les bornes de l'intervalle.
- P la précision (entier positif).
- N le nombre d'itérations.

On rentre : $A = 1$, $B = 2$, $P = 6$ et $f(x) = x^3 + x - 3$

On obtient : $A = 1{,}213\,411$, $B = 1{,}213\,412$ et $N = 20$.

```
Variables
A, B, C, P, N, f (fonction)
Algorithme
Lire A, B, P
0 → N
Tant que B − A > 10^(−P)
    (A + B)/2 → C
    Si f(A) × f(C) > 0 (*)
        C → A
    Sinon
        C → B
    FinSi
    N + 1 → N
FinTanque
Afficher : A, B, N
```

3 Dérivabilité

Définition 2 Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un point de I. On dit que la fonction f est dérivable en a si et seulement si le taux d'accroissement de la fonction f en a admet une limite finie ℓ en a, c'est à dire :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell \quad \text{et} \quad \ell = f'(a)$$

Variation : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

- Si $\forall x \in$ I, $f'(x) = 0$, alors la fonction $f$est **constante** sur I.
- Si $\forall x \in$ I, $f'(x) > 0$, alors la fonction f est **croissante** sur I.
- Si $\forall x \in$ I, $f'(x) < 0$, alors la fonction f est **décroissante** sur I.

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Dérivée	D'_f
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

Règles de dérivation

Dérivée	Formule
de la somme	$(u+v)' = u' + v'$
de ku	$(ku)' = ku'$
du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
de l'inverse	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
du quotient	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
de la racine	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
du logarithme	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
de l'exponentielle	$[e^u]' = u'e^u$

Tangente : Lorsque f est dérivable en a, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente de coefficient directeur $f'(a)$ dont l'équation est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Pour déterminer les points de $\mathscr{C}_f$ où la tangente est parallèle à une droite d'équation $y = mx + p$, on résout l'équation $f'(x) = m$.

Extremum : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I. a un point de I.

- Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.
- Si $f'(a) = 0$ et si f' change de signe en a alors la fonction f admet un extremum local en a.

4 Fonctions exponentielle et logarithme

Existence

Définition 3

- La fonction exponentielle "exp" est l'unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$. On note alors $\exp(x) = e^x$
- La fonction logarithme népérien notée ln est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Elle est définie sur $\mathbb{R}_+^*$

⚠ La fonction e^{x^2-1} existe sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction $\ln(x^2-1)$ existe sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ car il faut que $x^2 - 1 > 0$

Relation entre les deux fonctions

Pour tout y réel positif et x réel, on a :

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = x$$

$$\ln(e^x) = x \quad \text{et} \quad e^{\ln y} = y$$

Variations des deux fonctions

La fonction exponenttielle et la fonction logarithme sont strictement croissante sur leur ensemble de définition

Fonction logarithme

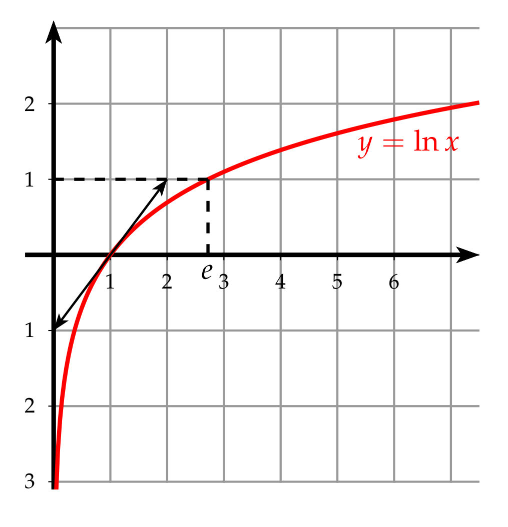
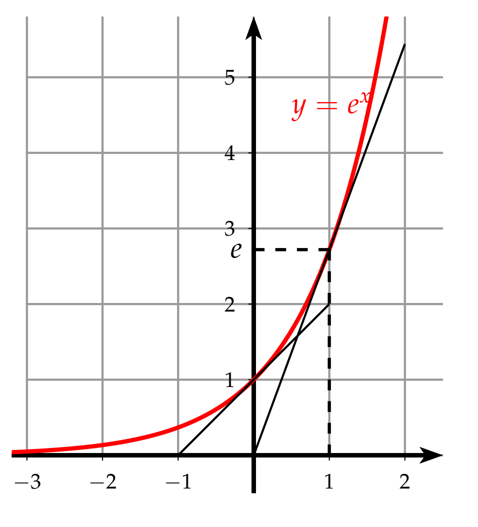
x	0		1		e		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	‖			+			
ln	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

Fonction exponentielle

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\exp'(x)$				+			
$\exp(x)$	0	↗	1	↗	e	↗	$+\infty$

Représentation des deux fonctions

Les deux courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Fonction logarithme	Fonction exponentielle
	

Propriétés algébriques

Fonction logarithme	Fonction exponentielle
$\ln 1 = 0 \quad \text{et} \quad \ln e = 1$	$e \simeq 2{,}718\,282$
$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad , \quad \ln \dfrac{1}{b} = -\ln b$	$e^0 = 1 \quad \text{et} \quad e^1 = e$
$\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad , \quad \ln a^n = n \ln a$	$e^{a+b} = e^a \times e^b \quad , \quad e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
$\ln \sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \ln x$	$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b} \quad , \quad (e^a)^n = e^{na}$

- Pour $x > 0$, on a : $\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -\ln x^2 = -2\ln x$
- Pour tout x, on a : $(e^{-x})^2 \times e^{3x} = e^{-2x} \times e^{3x} = e^x$

Signe des deux fonctions

Fonction logarithme	Fonction exponentielle
Si $0 < x < 1$ alors $\ln x < 0$ Si $x > 1$ alors $\ln x > 0$	Pour tout x : $e^x > 0$

Équations et inéquations

Fonction logarithme	Fonction exponentielle
Pour a, b et x positif	Pour a, b et x positif
$\ln a = \ln b \iff a = b$	$e^a = e^b \iff a = b$
$\ln a < \ln b \iff a < b$	$e^a < e^b \iff a < b$
$\ln x = y \iff x = e^y$	$e^y = x \iff y = \ln x$
$\ln x < y \iff 0 < x < e^y$	$e^y < x \iff y < \ln x$

⚠ Pour les équations et les inéquations avec les logarithmes, ne pas oublier de commencer par définir les **conditions d'existence** (les expressions contenues dans un logarithme doivent être positives)

Limites et croissance comparée

Fonction logarithme	Fonction exponentielle
$\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \, , \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$	$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$	$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$
$\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \text{ ou } \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Exemples

Équations et inéquations

- Résoudre : $\ln x + \ln 2 = 5 \quad D_f = \mathbb{R}_+^*$

  On a alors : $\ln 2x = 5 \iff 2x = e^5 \iff x = \dfrac{e^5}{2}$
- Résoudre : $\ln(x+2) \leqslant 1 \;\; D_f =]-2;+\infty[$

  On a alors $\; x+2 \leqslant e \iff x \leqslant e-2, \quad S =]-2; e-2]$
- Résoudre $\; e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \iff X^2 - 2X - 3 = 0$ avec $X = e^x$ et $X > 0$

  $X_1 = -1$ (non retenu) donc $X_2 = 3$ d'où $e^x = 3 \iff x = \ln 3$
- Résoudre $\; e^x < 5e^{-x} \iff e^x < \dfrac{5}{e^x} \iff e^{2x} < 5 \iff 2x < \ln 5 \iff x < \dfrac{\ln 5}{2}$

  $S = \left] -\infty; \dfrac{\ln 5}{2} \right[$

Limites

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 3e^x - x^2 = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(3 - \frac{x^2}{e^x}\right) = +\infty$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + \ln x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \times \frac{1 + \frac{\ln x}{e^x}}{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$ car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} + \ln x = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}(1 + x\ln x) = +\infty$ car $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x\ln x = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x(x+1) = \lim_{x\to-\infty} xe^x + e^x = 0$ car $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$