Les fonctions sinus et cosinus

Table des matières

1 Rappels

1.1 Mesure principale

Définition 1 : On appelle mesure principale d'un angle α, la mesure x qui se trouve dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$

Exemple : Trouver la mesure principale des angles dont les mesures sont :

$$\frac{17\pi}{4} \quad \text{et} \quad -\frac{31\pi}{6}$$

- $\frac{17\pi}{4}$ est un mesure trop grande ($>\pi$), il faut donc lui enlever un certain nombre k de tours (2π) pour obtenir la mesure principale :

$$\frac{17\pi}{4} - k2\pi = \frac{\pi(17-8k)}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \text{avec} \quad k=2$$

- $-\frac{31\pi}{6}$ est une mesure trop petite($\leqslant -\pi$), il faut donc lui rajouter un certain nombre k de tours (2π) pour obtenir la mesure princimale :

$$-\frac{31\pi}{6} + k2\pi = \frac{\pi(-31+12k)}{6} = \frac{5\pi}{6} \quad \text{avec} \quad k=3$$

1.2 Résolution d'équations

Théorème 1 : Équations trigonométriques

- L'équation $\cos x = \cos a$ admet les solutions suivantes sur $\mathbb{R}$:
$$x = a + k2\pi \quad \text{ou} \quad x = -a + k2\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$
- L'équation $\sin x = \sin a$ admet les solutions suivantes sur $\mathbb{R}$:
$$x = a + k2\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - a + k2\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$ b) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

a) $$\sqrt{2}\cos x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \cos\frac{\pi}{4}$$

On obtient les solutions : $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

b) $$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \sin\frac{\pi}{3}$$

On obtient les solutions :

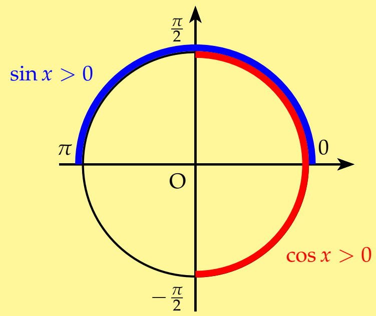
$$x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

1.3 Signe des lignes trigonométriques

Théorème 2 : On a sur $]-\pi\ ;\ \pi]$,

$$\sin x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]0\ ;\ \pi[$$

$$\cos x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$$

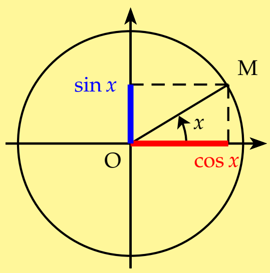


2 Fonctions sinus et cosinus

2.1 Définition

Définition 2 : À tout réel x, on associe un point unique M du cercle unité ou cercle trigonométrique de centre O, dont les coordonnées sont :

$$M(\cos x\ ;\ \sin x)$$



Définition 3 : On appelle fonctions sinus et cosinus les fonctions respectives :

$$x \mapsto \sin x \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \cos x$$

Remarque : $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$

2.2 Propriétés

2.2.1 Parité

Théorème 3 : D'après les formules de trigonométrie,

- La fonction sinus est impaire : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(-x) = -\sin x$
- La fonction cosinus est paire : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(-x) = \cos x$

Conséquence La courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine, et la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2.2.2 Périodicité

Théorème 4 : D'après la définition des lignes trigonométriques dans le cercle, les fonctions sinus et cosinus sont 2π périodiques : $T = 2\pi$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(x+2\pi) = \sin x \quad \text{et} \quad \cos(x+2\pi) = \cos x$$

Conséquence On étudiera les fonctions sinus et cosinus sur un intervalle de 2π, par exemple $]-\pi;\pi]$.

2.2.3 De sinus à cosinus

Théorème 5 : D'après les formules de trigonométrie, on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

Exemple : Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$, l'équation suivante :

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x$$

On transforme par exemple le cosinus en sinus, l'équation devient alors :

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Dans $\mathbb{R}$, on trouve les solutions suivantes :

$$\begin{cases} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{4} = \pi - \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ 0x = \pi - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$$

La deuxième série de solutions étant impossible, on trouve alors dans $\mathbb{R}$

$$x = \frac{\pi}{8} + k\pi$$

Dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$, on prend $k = -1$ et $k = 0$, soit les solutions

$$x = -\frac{7\pi}{8} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{8}$$

3 Étude des fonctions sinus et cosinus

3.1 Dérivées

Théorème 6 : Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$:

$$\sin' x = \cos x \quad \text{et} \quad \cos' x = -\sin x$$

Remarque : On admettra ces résultats.

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction suivante :

$$f(x) = \cos 2x + \cos^2 x$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\sin 2x - 2\sin x \cos x \\ &= -2\sin 2x - \sin 2x \\ &= -3\sin 2x \end{aligned}$$

3.2 Application aux calculs de limites

Théorème 7 : D'après les fonctions dérivées des fonctions sinus et cosinus, on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

ROC

Démonstration : On revient à la définition du nombre dérivée en 0.

$$\sin' 0 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin h - \sin 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$$

or on sait que : $\sin' 0 = \cos 0 = 1$ donc $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

de même, on a :

$$\cos' 0 = \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - \cos 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$

or on sait que : $\cos' 0 = -\sin 0 = 0$ donc $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$

3.3 Variation

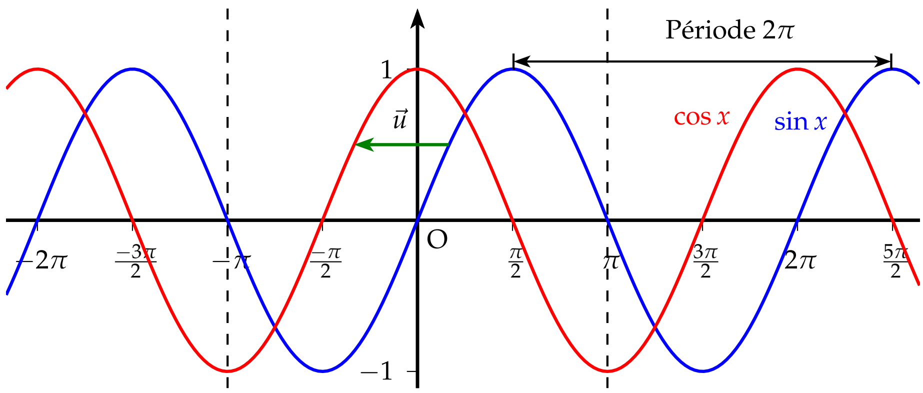
Comme les fonctions sinus et cosinus sont 2π périodiques, on étudie les variations sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$. D'après le signe des fonctions sinus et cosinus, on obtient les tabeaux de variation suivants :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin' x = \cos x$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	$-\pi$		0		π
$\cos' x = -\sin x$		$+$	0	$-$	
$\cos x$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

3.4 Courbes représentatives

- Les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus sont des sinusoïdes.
- De la relation $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, on déduit la sinusoïde de cosinus par une translation de vecteur $\vec{u} = -\dfrac{\pi}{2}\vec{\imath}$ de la sinusoïde de sinus.



3.5 Compléments

Théorème 8 : a et b sont deux réels.
Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(ax+b)$ et $g(x) = \cos(ax+b)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = a\cos(ax+b) \quad \text{et} \quad g'(x) = -a\sin(ax+b)$$

Remarque : Les fonctions f est g sont $\dfrac{2\pi}{a}$ périodiques : en effet

$$\sin\left[a\left(x + \frac{2\pi}{a}\right) + b\right] = \sin(ax + b + 2\pi) = \sin(ax+b)$$

4 Application aux ondes progressives

4.1 Onde sonore

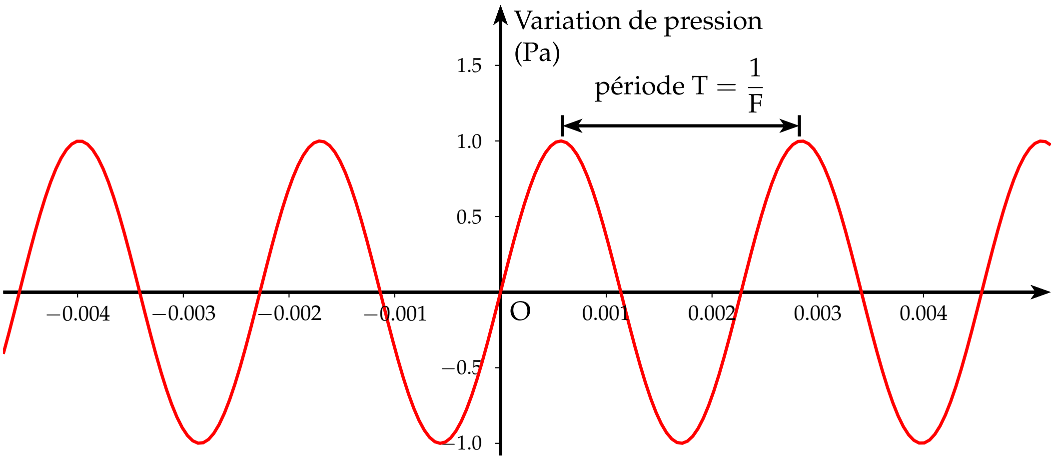
Un son pur est une onde sinusoïdale caractérisée par :

- Sa fréquence F (en Hertz, nombre de pulsations par seconde) qui détermine la hauteur du son.
- Son amplitude (pression acoustique) P (en Pascal).

La fréquence F est relié à la période T de la sinusoïde par la relation : $\mathrm{F} = \dfrac{1}{\mathrm{T}}$
La fonction f associée est donc de la forme : $f(t) = \mathrm{P}\sin(2\,\pi \mathrm{F}\,t)$

La note de référence (donnée par un diapason) sur laquelle s'accordent les instruments de l'orchestre est le la$_3$ qui vibre à 440 Hz. Pour une amplitude de 1 Pa, cette note peut être associé à la fonction f définie par : $f(t) = \sin(880\pi\,t)$.

L'écran d'un oscilloscope donne alors :



4.2 Harmoniques

Une bonne technique pour analyser les ondes a été conçu en 1807 par le physicien français **Jean-Baptiste Fourier**. Il a établi que toute onde rencontrée dans la nature, qu'elle soit une impulsion ondulatoire ou une onde périodique entretenue peut être considérée comme résultant de la superposition d'ondes sinusoïdales. Cela peut se réaliser, dans le cas du son, par un analyseur de spectre et, dans le cas de la lumière, par un prisme.

Selon Fourier, toute fonction périodique de fréquence F peut être considérée comme une somme de termes sinusoïdaux avec des amplitudes et des phases appropriées. Le premier d'entre eux a la même fréquence ($F_1 = F$). C'est le **fondamental** ou le premier harmonique. Le terme suivant, de fréquence $F_2 = 2F$ est appelé deuxième harmonique puis vient le troisième terme de fréquence $F_3 = 3F$, appelé troisième harmonique et ainsi de suite. Notons que, pendant le temps $(1/F_1)$ que met le fondamental pour décrire un cycle complet, le deuxième harmonique a décrit deux cycles et le n^{e} harmonique n cycles.

Exemples :

- Le signal en "dents de scie", une des formes d'ondes fréquemment utilisées pour la synthèse sonore, a pour expresion :

$$f_n(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left[2\pi kF\,t + (k-1)\pi\right]}{k} \quad \text{avec} \quad n \to +\infty$$

  Si on s'intéresse aux 5 premières harmoniques avec une fréquence fondamentale F = 1, on a alors la fonction f_6 :

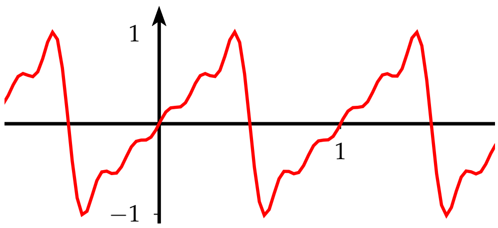
$$f_5(t) = \frac{2}{\pi}\left[\sin(2\pi\,t) + \frac{1}{2}\sin(4\pi\,t + \pi) + \frac{1}{3}\sin(6\pi\,t) + \frac{1}{4}\sin(8\pi\,t + \pi) + \frac{1}{5}\sin(10\pi\,t)\right]$$

  On observe que deux harmoniques successives sont en opposition de phase.

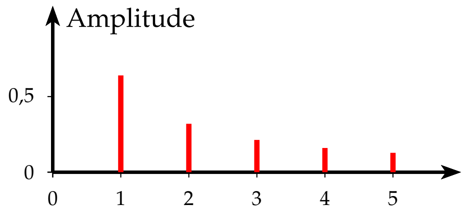
  Si on trace la fonction f_5, on observe clairement une courbe qui ressemble à une courbe en "dent de scie". En ajoutant une douzaine d'autres termes, on obtiendrait alors une meilleure approximation.

  Algorithme : Tracer f_5 avec les 5 harmoniques

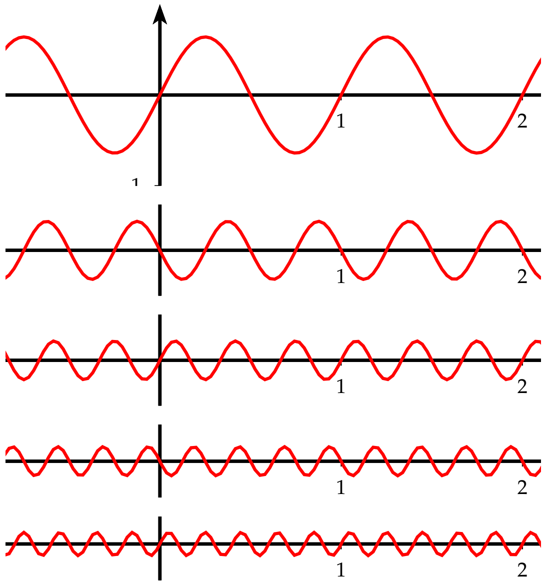
  On observe alors la superposition des 5 harmoniques ainsi que le spectre de fréquence



Signal en dent de scie
(5 premières harmoniques)

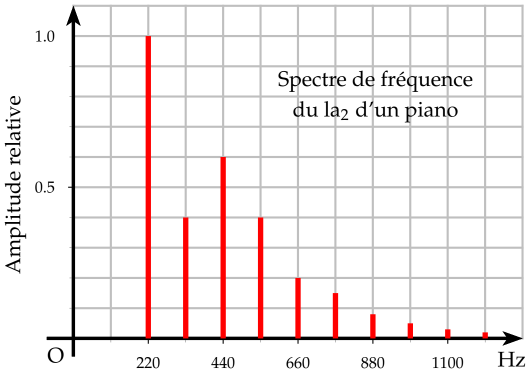


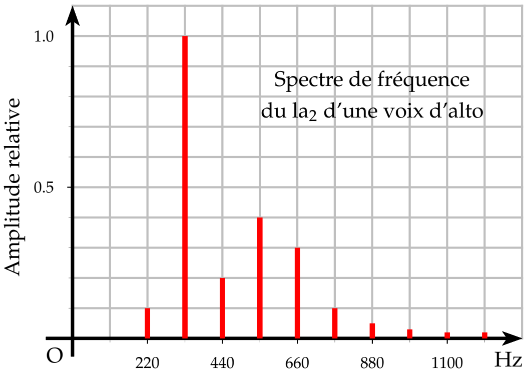
Amplitude des harmoniques



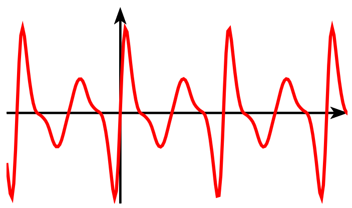
- Deux instruments jouant la même note sont reconnaissables par le timbre : assemblage unique d'harmoniques. Une note produit par un piano a un spectre de fréquence très différent de celle d'un chanteur et l'oreille distingue facilement le chanteur de l'accompagnement piano.

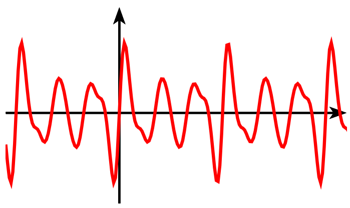
  Remarque : La deuxième harmonique correspond à l'octave ($F_2 = 2F$) et la troisième à la quinte ($F_3 = 3F$)





On obtient les profils suivants des ondes produites par le piano et par une voix d'alto :





Algorithme : Tracer ces deux profils d'onde sur votre calculette

- Un algorithme de synthétiseur permettant de générer un la_1 de façon aléatoire.

  Ecrire un algorithme permettant de :
  - générer aléatoirement un nombre entier n compris entre 2 et 5
  - générer n nombres aléatoires $a_1, a_2, \ldots, a_n$ compris dans l'intervalle [0 ;1]

– représenter le signal f défini par :

$$f(t) = \sin(110\pi\, t) + a_1 \sin(220\pi\, t) + a_2 \sin(330\pi\, t) + \cdots + a_n \sin(110(n+1)\pi\, t)$$

On remet la liste L à 0 de dimension 5.
On entre ensuite un nombre aléatoire entre 2 et 5 dans N
On génére les coefficients a_1 à a_N
Si $N < 5$, on génére des coefficients nuls de a_{N+1} à a_N.
On affiche le graphe, en ayant auparavant rentrer les fonctions
$f_1(x) = \sin(110\pi\, x)$, $f_2(x) = \sin(220\pi\, x)$, ..., $f_6(x) = \sin(660\pi\, x)$
$f_7 = f_1 + L(1)f_2 + L(2)f_3 + L(3)f_4 + L(4)f_5 + L(5)f_6$
On règle ensuite la fenêtre pour le graphe :
$X_{min} = -0,02$, $X_{max} = 0,02$, $X_{grad} = 0,01$
$Y_{min} = -4$, $Y_{max} = 4$, $Y_{grad} = 1$

⚠ Ne sélectionner que f_7 pour le graphe

Variables
N, I, L (liste)
f_1, f_2, ..., f_7 (fonctions)
Algorithme
Effacer liste L
entierAléat$(2, 5) \to N$
Pour I variant de 1 à N faire
  NbreAléat $\to L(I)$
FinPour
Si $N < 5$
  Pour I variant de $N + 1$ à 5 faire
    $0 \to L(I)$
  FinPour
FinSi
Afficher le graphe de f_7