Les fonctions sinus et cosinus

Rappels

EXERCICE 1

Trouver les mesures principales puis les valeurs exactes du sinus et du cosinus des angles suivants.

1) $\dfrac{7\pi}{6}$
2) $\dfrac{9\pi}{4}$
3) $\dfrac{4\pi}{3}$
4) $\dfrac{11\pi}{6}$
5) $\dfrac{71\pi}{3}$
6) $\dfrac{81\pi}{4}$
7) $-\dfrac{107\pi}{4}$
8) $-\dfrac{97\pi}{3}$
9) $-\dfrac{13\pi}{6}$

EXERCICE 2

Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle sur $\mathbb{R}$, puis représenter les solutions sur le cercle unité :

1) $2\sin x + 1 = 0$
2) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$
3) $\cos(2x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
4) $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$
5) $4\cos^2 x - 1 = 0$
6) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

EXERCICE 3

Résoudre les inéquations suivantes sur $I =]-\pi; \pi]$ et sur $J = [0; 2\pi[$

1) $2\sin x + \sqrt{2} < 0$
2) $2\cos x - \sqrt{3} \leqslant 0$
3) $2\sin x + 1 \geqslant 0$
4) $\sqrt{2}\cos x > 1$

EXERCICE 4

Résoudre dans $]-\pi; \pi]$:

1) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos x$
2) $4\sin^2 x - 3 \leqslant 0$
3) $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$
4) $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 \leqslant 0$

Étude de fonctions

Exercice 5

f est la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2}{2 + \cos x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Montrer que la fonction f est paire et déterminer sa période.
3) Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervalle $[0; \pi]$.
4) Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi; \pi]$ et tracer l'allure de la fonction sur $[-\pi; 3\pi]$

Exercice 6

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos^2(2x) + \cos(2x) - 1$

1) Déterminer la période et la parité de la fonction f.
2) Déterminer l'intervalle d'étude de la fonction f.
3) Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervelle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$
4) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et tracer l'allure de la fonction sur $[-\pi; \pi]$

Exercice 7

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \left(1 + \cos \dfrac{x}{2}\right) \sin \dfrac{x}{2}$

1) Déterminer la période et la parité de la fonction f.
2) Déterminer l'intervalle d'étude de la fonction f.
3) Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervelle $[0, 2\pi]$
4) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[-2\pi, 2\pi]$ et tracer l'allure de la fonction sur $[-4\pi; 4\pi]$

Exercice 8

Vrai - Faux

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. On justifiera chaque réponse.

f est la fonction définie sur $I = \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \sin^2 x \cos(2x)$

- **Proposition 1 :** $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant 0$
- **Proposition 2 :** $\forall x \in I,\ f'(x) = \sin(2x)(1 - 4\sin^2 x)$
- **Proposition 3 :** La fonction f est décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{4}\right]$
- **Proposition 4 :** La fonction f est décroissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{6}\right]$
- **Proposition 5 :** $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant \dfrac{1}{8}$

Annales

Exercice 9

Polynésie septembre 2005

Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = e^{-x}\cos(4x)$
et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ci-dessous. On considère également la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^{-x}$ et on nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) a) Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,

$$-e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$$

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

2) Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et $\mathscr{C}$.

3) On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.

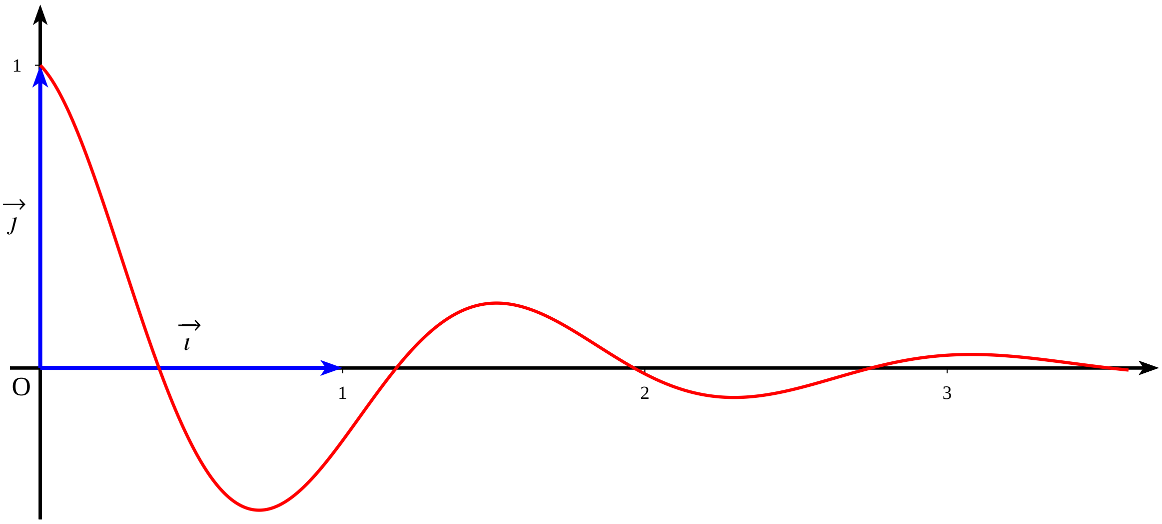
b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.

4) a) Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ; +\infty[$,

$$f'(x) = -e^{-x}\left[\cos(4x) + 4\sin(4x)\right]$$

b) En déduire que les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.

5) Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite T tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.
Compléter le graphique ci-dessous en y traçant T et $\mathscr{C}$.



Exercice 10

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + \sin 2x + 2\cos x$

1) Visualiser la courbe sur votre calculatrice et faites une conjecture sur la périodicité de la fonction f puis démontrer cette conjecture. On prendra comme fenêtre $x \in [-4; 13]$, $y \in [-2; 4]$ et comme graduations π sur les abscisses et 1 sur les ordonnées.

2) Montrer que l'on peut étudier la fonction f sur $I = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ puis montrer que :

$$f'(x) = -2(\sin x + 1)(2\sin x - 1)$$

3) Étudier les variations sur I puis dresser le tableau de variation sur I.
4) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède exacttement deux solutions dans I et donner un encadrement à 10^{-2} de chacune de ces solutions. On note α et β ces solutions avec $\alpha < \beta$.
5) En déduire les variations sur I de la fonction g définie par : $g(x) = 2x - \cos 2x + 4\sin x$

Exercice 11

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie.

On considère une fonction f, sa dérivée f' et son unique primitive F s'annulant en $x = 0$. Les représentations graphiques de ces trois fonctions sont données (dans le désordre) par les courbes ci-dessous.
Proposition : « La courbe 3 ci-dessous est la représentation graphique de f ».