Les fonctions sinus et cosinus

Dérivabilité

$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1\,;\,1]$ $\quad x \longmapsto \sin(x)$

$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1\,;\,1]$ $\quad x \longmapsto \cos(x)$

sin et cos sont dérivables donc continues sur $\mathbb{R}$.

- $\sin' x = +\cos x$
- $\cos' x = -\sin x$

Dérivées de la composée

Soit u une fonction dérivable sur I

$$\sin\circ u \;:\; x \xmapsto{u} u(x) \xmapsto{\sin} \sin[u(x)]$$

$$\cos\circ u \;:\; x \xmapsto{u} u(x) \xmapsto{\cos} \cos[u(x)]$$

$\sin\circ u$ et $\cos\circ u$ sont dérivables sur I et

- $\forall x \in \text{I},\quad (\sin\circ u)'(x) = +u'(x)\cos[u(x)]$
- $\forall x \in \text{I},\quad (\cos\circ u)'(x) = -u'(x)\sin[u(x)]$

Exemple : $f(x) = \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right) \Rightarrow f'(x) = 2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Formules élémentaires

- sin et cos sont bornées $\begin{cases} -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \end{cases}$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- De sinus à cosinus :

  $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad$ et $\quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

Intervalle d'étude

sin et cos sont 2π-périodique et respectivement impaire et paire, on peut restreindre leur intervalle d'étude à l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.
On complète ensuite sur $[-\pi\,;\,0]$ par symétrie.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin' x$		$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos' x$			$-$		
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Périodicité et parité

1) sin et cos sont 2π-périodique :
   - $\forall x \in \mathbb{R},\quad \sin(x+2\pi) = \sin x$
   - $\forall x \in \mathbb{R},\quad \cos(x+2\pi) = \cos x$

2)
   - La fonction sin est impaire :
     $\forall x \in \mathbb{R},\quad \sin(-x) = -\sin x$
     $\mathscr{C}_{\sin}$ admet l'origine O pour centre de symétrie.
   - La fonction cos est paire :
     $\forall x \in \mathbb{R},\quad \cos(-x) = \cos x$
     $\mathscr{C}_{\cos}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

Limites utiles - ROC

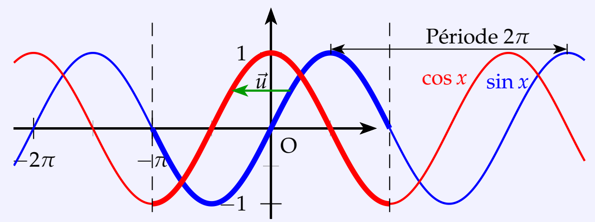
Limites qui reviennent aux nombres dérivés en 0 :

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0$

Application : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} 2 \times \frac{\sin(2x)}{2x} = 2$

Courbes représentatives

- Les courbes de sin et cos sont des sinusoïdes.
- On déduit la sinusoïde de cos par une translation de vecteur $\vec{u} = -\frac{\pi}{2}\vec{\imath}$ de la sinusoïde de sin.



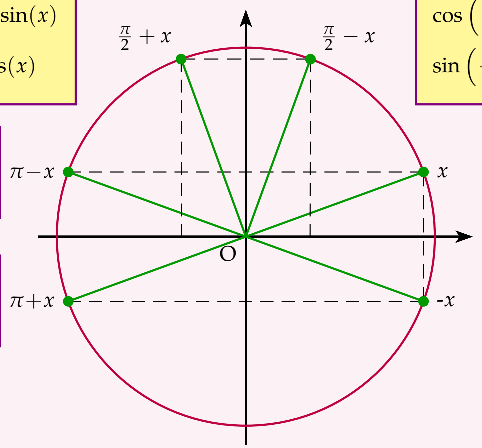
Compléments

Les angles associés :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$



$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

$\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$

Formules d'addition :

- Avec sinus on panache :
  $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
  $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- Avec cosinus on ne panache pas :
  $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
  $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Formules de duplication :

- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$
- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
  $= 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

La fonction tangente

(La grande oubliée)

On pose $\tan\ :\ x \longmapsto \tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

- $D_f = \{x \in \mathbb{R},\ \cos x \neq 0\} = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
- La fonction tan est dérivable sur D_f :
  $\tan' x = \left(\dfrac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \dfrac{\cos^2 + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
  La fonction tangente est strictement croissante sur D_f
- La fonction tan est π-périodique car :
  $\forall x \in D_f,\ \tan(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$
- La fonction tan est impaire : $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(x)} = -\dfrac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$
  $\mathscr{C}_{\tan}$ est symétrique par rapport à l'origine O.
- On peut donc restreindre l'étude à l'intervalle : $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$
- Tableau de variation

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan' x$		$+$	‖
$\tan x$	0 ↗	1 ↗	$+\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1 \\ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0^+ \end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$

$x = \dfrac{\pi}{2}$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_{\tan}$

- On obtient la courbe $\mathscr{C}_{\tan}$ suivante :