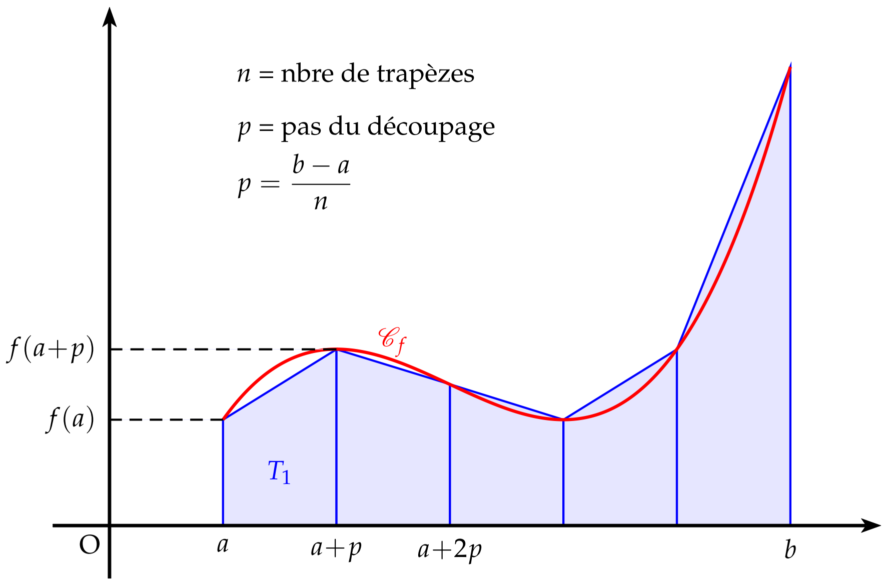
# Intégrale : méthode des trapèzes Algorithme

## 1 Intégrale : méthode des trapèzes

### 1.1 La méthode

Nous avons vu l'approche de l'aire sous une courbe à l'aide de la méthode de Riemann qui consiste à découper l'aire sous la courbe en deux séries de rectangles (l'une minorante et l'autre majorante). Les deux séries de rectangles tendent vers l'intégrale lorsque le découpage tend vers l'infini. On peut alors prendre l'une des deux séries pour donner une approximation de cette aire. L'approximation sera d'autant meilleure que le découpage est important.

On peut améliorer la vitesse de convergence de cette approximation en remplaçant les rectangles par des trapèzes comme le montre la figure ci-dessous.




Pour calculer l'aire du premier trapèze

$$T_1 = \frac{(\text{Grande base} + \text{Petite base}) \times \text{hauteur}}{2} = \frac{[f(a) + f(a+p)] \times p}{2}$$

On fait ensuite un décalage de $p$ pour calculer les aires des trapèzes suivants.

L'approximation de l'aire sous la courbe est alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} T_i \;\text{ somme des aires des trapèzes}$$

## 1.2 Algorithme

- On initialise $S$ à zéro.
- À chaque boucle, on rajoute d'aire du trapèze : $\dfrac{[f(A)+f(A+P)]P}{2}$
- On affiche $S$
- On rentre dans $Y_1$ la fonction $f$.

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP

PROGRAM:TRAPEZES
:Prompt A,B,N
:(B-A)/N→P
:0→S
:For(I,1,N)
:S+(Y₁(A)+Y₁(A+P))P/2→S
:A+P→A
:End
:Disp S
:
```

**Variables** : $I, N$ entiers $A, B, P$ réels
$f$ fonction
**Entrées et initialisation**
Lire $A, B, N$
$\dfrac{B-A}{N} \to P$
$0 \to S$
**Traitement**
**pour** $I$ de 1 à $N$ **faire**
$S + \dfrac{[f(A)+f(A+P)]\,P}{2} \to S$
$A+P \to A$
**fin**
**Sorties** : Afficher $S$

On teste le programme avec la fonction $Y_1$ définie par $Y_1 = \sqrt{1-(x-1)^2}$ entre 0 et 2 représentant un demi-cercle de centre (1 ;0) et de rayon 1. À comparer avec l'aire d'un demi-cercle $\dfrac{\pi}{2} = \approx 1,571$.

| $n$ | 5 | 10 | 20 | 100 |
|---|---|---|---|---|
| $S_n$ | 1,424 | 1,519 | 1,552 | 1,569 |

**Vitesse de convergence** : la méthode des trapèzes converge bien plus vite que la méthode des rectangles, comme on peut le constater sur le tableau suivant qui calcule l'aire sous la parabole d'équation $Y_1 = X^2$ entre les abscisses 0 et 1 (valeur exacte $\frac{1}{3}$).

| $n$ | Trapèze | Rectangles |
|---|---|---|
| 5 | 0,34 | 0,24 |
| 20 | 0,3338 | 0,3088 |
| 100 | 0,3333 | 0,3384 |

Avec 20 itérations, la méthode des trapèzes approche la valeur exacte à $10^{-3}$, tandis que la méthode des rectangles atteint cette précision avec 1 000 itérations ! !