Compléments sur l'intégration

1 Calculs de primitives

Quelques exemples plus complexes

La liste de recherche de primitives n'est pas exhaustive. Dans les exercices, la procédure sera indiquée.

Exemple 1

- Soit la fonction rationnelle définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

  On observe que la forme de f ne correspond à aucune forme du tableau des primitives. Pour trouver une primitive de la fonction f, on décompose f en « éléments simples » :

  $$f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{(x-1)+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}$$

  On a alors une forme connue. Sur $]1;+\infty[$, on obtient :

  $$F(x)=x+\ln|x-1|=x+\ln(x-1)$$

- Soit la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$

  1) Montrons que l'on peut décomposer la fonction en éléments simples, soit de la forme :

  $$f(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{(x+1)^2}$$

  On réduit cette forme puis on identifie à la première :

  $$\begin{aligned}\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{(x+1)^2}&=\frac{a(x+1)^2+b(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}\\&=\frac{(a+b)x^2+2(a-b)x+a+b}{(x^2-1)^2}\end{aligned}$$

  On obtient alors le système suivant :

  $$\begin{cases}a+b=1\\2(a-b)=1\\a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{4}\\b=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

  On a donc :

  $$f(x)=\frac{3}{4(x-1)^2}+\frac{1}{4(x+1)^2}$$

2) On obtient donc la primitive suivante :

$$F(x) = -\frac{3}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)}$$

Exemple 2

- Il faut parfois penser à la dérivation du produit : $(uv)' = u'v + uv'$.

  Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x + x\cos x$

  La fonction comporte deux parties qui peuvent s'analyser comme la somme du produit de la dérivée de x par $\sin x$ et du produit de x par la dérivée de $\sin x$. La primitive est alors :

  $$F(x) = x\sin x.$$

  qui si on la dérive donne : $F'(x) = \sin x + x\cos x$
- De manière identique, on peut penser à la dérivation du quotient :

  $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

  Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

  On peut alors poser : $u(x) = \ln x$ et $v(x) = x$, on a alors

  $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

  On a donc :

  $$F(x) = \frac{\ln x}{x}$$

2 Intégrale d'une fonction continue

Intégration par partie

Théorème 1 : Soit u et v deux fonctions dérivables sur I telles que u' et v' soient continues sur I. Alors :

$$\int_a^b uv'(x)\mathrm{d}x = [uv(x)]_a^b - \int_a^b u'v(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration : Si u et v sont dérivables sur I, alors le produit l'est également. On a donc :

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{donc :}$$
$$uv' = (uv)' - u'v$$

Comme les dérivées de u et v sont continues, on peut donc intégrer, on obtient donc :

$$\int_a^b uv'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \left[(uv)'(x) - u'v(x)\right] \mathrm{d}x$$

par linéarité de l'intégrale :

$$= \int_a^b (uv)'(x) - \int_a^b u'v(x)\mathrm{d}x$$
$$= [uv(x)]_a^b - \int_a^b u'v(x)\mathrm{d}x$$

Exemples :

1) Déterminer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 xe^x \mathrm{d}x$

   On ne peut trouver un primitive car on ne retrouve pas la forme $u'e^u$. Il faudrait qu'il est pas le x devant l'exponentielle. D'où la décomposition suivante :

$$u(x) = x \qquad u'(x) = 1$$
$$v'(x) = e^x \qquad v(x) = e^x$$

   On obtient donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x \mathrm{d}x &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \mathrm{d}x\\ &= [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1\\ &= (e-0) - (e-1)\\ &= 1\end{aligned}$$

2) Déterminer une primitive de $\ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$

   Soit F la primitive de ln qui s'annule en 1. On a alors :

$$F(x) = \int_1^x \ln t \mathrm{d}t$$

   Comme la primitive de ln n'est pas connue, on décompose $\ln t$ en :

$$\ln t = 1 \times \ln t$$

   on pose alors :

$$u(t) = \ln t \qquad u'(t) = \frac{1}{t}$$
$$v'(t) = 1 \qquad v(t) = t$$

   On a alors :

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_1^x \ln t \mathrm{d}t\\ &= [t\ln t]_1^x - \int_1^x \mathrm{d}t\\ &= [t\ln t]_1^x - [t]_1^x\\ &= x\ln x - x + 1\end{aligned}$$

   Si l'on cherche la primitive G de $\ln x$ avec une constante d'intégration nulle, on a :

$$G(x) = x\ln x - x$$

3) On peut être amené à faire une double intégration par partie. Par exemple : Déterminer la primitive F sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en -1 de

$$f(x) = (1+x)^2 e^{2x}$$

On a alors : $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} (1+t)^2 e^{2t} \mathrm{d}t$.

On cherche à faire disparaître le polynôme devant l'exponentielle. On pose alors :

$$\begin{aligned} u(t) &= (1+t)^2 & u'(t) &= 2(1+t) \\ v'(t) &= e^{2t} & v(t) &= \frac{1}{2}e^{2t} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-1}^{x} (1+t)^2 e^{2t} \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{2}(1+t)^2 e^{2t}\right]_{-1}^{x} - \int_{-1}^{x} (1+t) e^{2t} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}(1+x)^2 e^{2x} - I \end{aligned}$$

avec $I = \displaystyle\int_{-1}^{x} (1+t) e^{2t} \mathrm{d}t$.

Pour calculer I, on fait de nouveau une intégration par partie, on pose alors :

$$\begin{aligned} u(t) &= (1+t) & u'(t) &= 1 \\ v'(t) &= e^{2t} & v(t) &= \frac{1}{2}e^{2t} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{1}{2}(1+t) e^{2t}\right]_{-1}^{x} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{x} e^{2t} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}(1+x)e^{2x} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_{-1}^{x} \\ &= \frac{1}{2}(1+x)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2} \end{aligned}$$

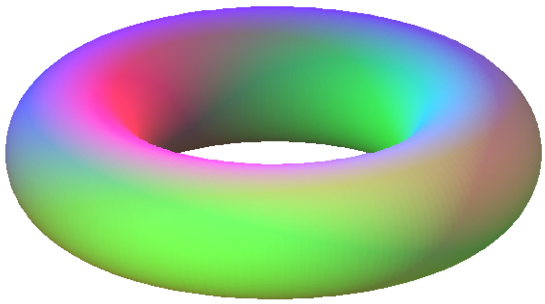
On obtient finalement pour F,

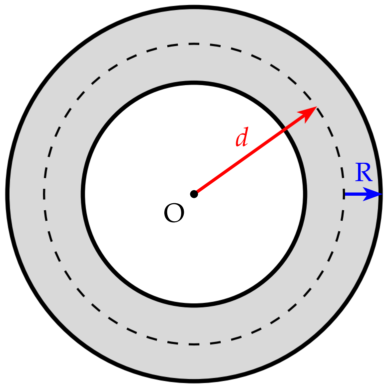
$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^2 e^{2x} - I \\ &= \frac{1}{2}(1+x)^2 e^{2x} - \frac{1}{2}(1+x)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2} \\ &= \frac{1}{4}(2+4x+2x^2-2-2x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2} \\ &= \frac{1}{4}(2x^2+2x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2} \end{aligned}$$

3 Calcul de volume

Volume d'un tore

Un tore est un solide qui a la forme d'une « chambre à air » ou d'un « donut » pour les anglais. Il est caractérisé par d et R comme indiqué sur la figure suivante :





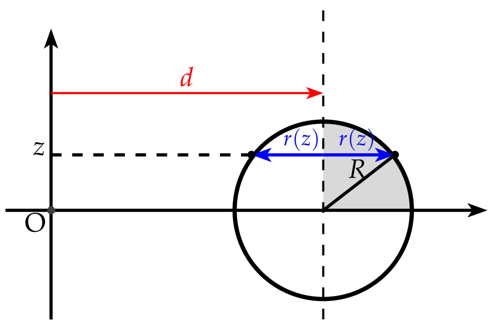
Si l'axe du tore est l'axe z alors lorsqu'on découpe le tore par des plan perpendiculaires à cet axe, on obtient des couronnes dont les rayon des cercles intérieur et extérieur sont respectivement $d + r(z)$ et $d - r(z)$, la surface d'une couronne d'altitude z vaut :

$$\begin{aligned} S(z) &= \pi \left[(d + r(z))^2 - (d - r(z))^2 \right] \\ &= \pi(d^2 + 2d\, r(z) + r^2(z) - d^2 + 2d\, r(z) - r^2(z)) \\ &= 4\pi d\, r(z) \end{aligned}$$

Le volume d'un demi tore vaut donc :

$$\frac{1}{2} V = \int_0^R S(z) \mathrm{d}z = 4\pi d \int_0^R r(z) \mathrm{d}z$$

On a la figure ci-dessous :



On a :

$$\begin{aligned} \int_0^R r(z) \mathrm{d}z &= \text{aire d'un quart de cercle} \\ &= \frac{\pi}{4} R^2 \end{aligned}$$

On obtient alors le volume du tore :

$$\frac{1}{2} V = 4\pi d \times \frac{\pi}{4} R^2 \quad \Leftrightarrow \quad V = 2\pi^2 R^2 d$$