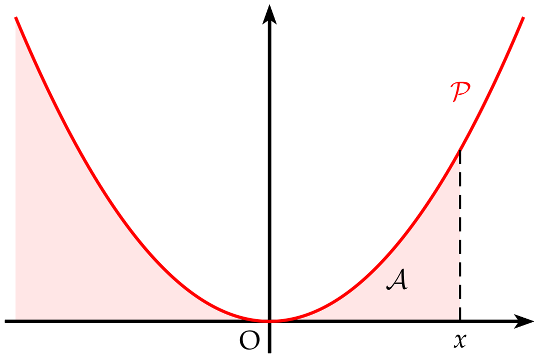
La quadrature de la parabole

1 Problème

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2$, et on appelle $\mathcal{P}$ la parabole qui la représente dans un repère orthonormé.

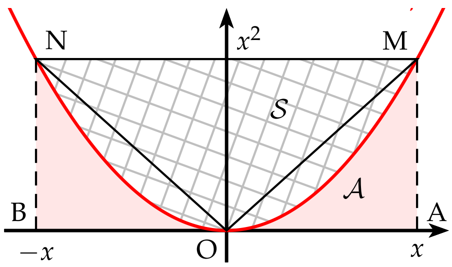
x étant un réel quelconque, quelle est l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par la courbe $\mathcal{P}$, l'axe des abscisses et la droite verticale d'abscisse x ?



2 Méthode d'Archimède (2e siècle avant J-.C) : la géométrie

En utilisant les propriétés géométriques de la parabole, Archimède a démontré le théorème suivant :

Le secteur $\mathcal{S}$ de parabole compris entre deux points M et N a pour aire les $\dfrac{4}{3}$ de l'aire du triangle MON, O désignant le point de la parabole où la tangente est parallèle à (MN).



Soit N le point symétrique de M par rapport à Oy. Le point O se situe donc à l'origine du repère :

$$\mathcal{S} = \frac{4}{3} \times \text{Aire(MON)} = \frac{4}{3} \times \frac{2x \times x^2}{2} = \frac{4x^3}{3}$$

$$\mathcal{A} = \text{Aire(AMNB)} - \mathcal{S} = 2x \times x^2 - \frac{4x^3}{3} = 2x^3 - \frac{4x^3}{3} = \frac{2x^3}{3}$$

Remarque : On retrouve : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{-x}^{x} t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-x}^{x} = \frac{x^3}{3} - \frac{(-x)^3}{3} = \frac{2x^3}{3}$

Méthode très ingénieuse, mais qui n'est pas généralisable à d'autres fonctions.

3 Méthode de Leibniz (fin du 17e siècle) : le calcul infinitésimal

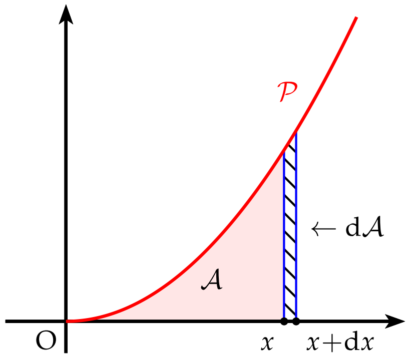
Leibniz, reprenant une idée de Pascal, découpe le domaine en tranches verticales d'épaisseur infinitésimale. La tranche située à l'abscisse x a pour épaisseur dx et

pour hauteur $f(x)$, donc pour aire le produit $f(x)\,\mathrm{d}x$. L'aire cherchée $\mathcal{A}$ s'obtient en faisant intégralement la somme de toutes ces aires, ce que Leibniz écrit :

$$\mathcal{A} = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Mais comment calculer cette somme intégrale, qui comporte une infinité de termes infiniment petits ?

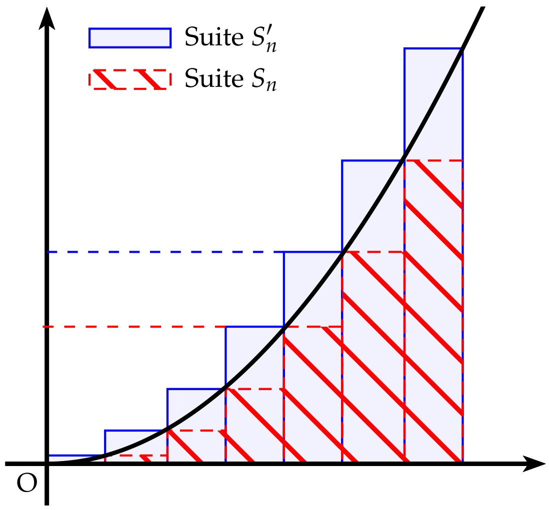
Leibniz remarque que si x augmente d'un accroissement infinitésimal $\mathrm{d}x$, l'aire $\mathcal{A}$ augmente de $\mathrm{d}\mathcal{A} = f(x)\,\mathrm{d}x$.
Autrement dit, $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}x} = f(x)$.
En notant $\mathcal{A} = F(x)$, F est alors une primitive de f, soit $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + k$
Comme $F(0) = 0$, alors $k = 0$ donc $\mathcal{A} = F(x) = \dfrac{x^3}{3}$



Méthode très puissante car généralisable à d'autres fonctions, mais qui pose une difficulté logique : qu'est-ce qu'une quantité infinitésimale ?

4 Méthode de Riemann (19e siècle) : le passage à la limite

Riemann reprend l'idée de découpage en tranches verticales, mais refuse la notion de quantités infiniment petites. Il découpe le domaine en un nombre fini n de tranches verticales.
Chaque tranche a une aire comprise entre l'aire de deux rectangles : un rectangle intérieur et un rectangle extérieur. Donc l'aire $\mathcal{A}$ est comprise entre l'aire totale S_n des rectangles intérieurs, et l'aire totale S'_n des rectangles extérieurs.
Pour calculer $\mathscr{A}$, il suffit alors de faire tendre n vers l'infini : les deux suites (S_n) et (S'_n) doivent tendre toutes les deux vers $\mathcal{A}$.



Remarque : Voir le cours pour le calcul de $\mathcal{A}$ pour $x \in [0;1]$

Méthode que Riemann généralise à d'autres fonctions, permettant non seulement une justification théorique de la méthode de Leibniz, mais aussi une définition précise de l'aire d'un domaine curviligne.