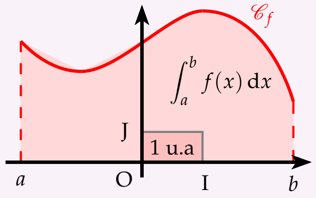
Définition

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a;b]$. Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

On appelle **intégrale de f sur** $[a;b]$ la mesure de l'aire en u.a. du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_f$.

On la note : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



Fonction paire et fonction impaire

- Si f est une fonction paire alors $\forall a \in D_f$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Si f est une fonction impaire alors $\forall a \in D_f$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. On appelle valeur moyenne μ de f sur $[a;b]$:

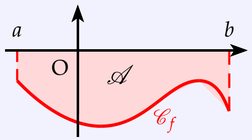
$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

La formule de la moyenne est attribuée à Pierre-Gosselin Bonnet(1819-1892)

Relations aire et intégrale

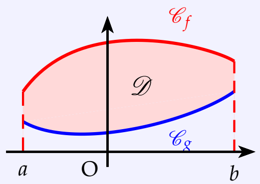
- Soit $f \leqslant 0$ une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

$$\mathscr{A} = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



- Soient deux fonctions $f \geqslant g$ continues sur $[a;b]$.

$$\mathscr{D} = \int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x$$



Intégration

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

f continue sur $[a;b]$

Inégalité de la moyenne

Si, pour tout $x \in [a;b]$, il existe deux réels m et M tels que : $m \leqslant f(x) \leqslant M$

Alors : $\displaystyle m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$

Primitive

- **Théorème d'existence** :
  Toute fonction f continues sur un intervalle I admet des primitives sur I.
- La fonction $F : x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ désigne l'unique primitive de f qui s'annule en a.
  $F(a) = 0$ et $\forall x \in \mathrm{I},\ F'(x) = f(x)$
- **Lien entre primitive et intégrale** :

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_0^b = F(b) - F(a)$$

Propriétés algébrique

Soit f une fonction continue sur un intervalle I :

- **Linéarité de l'intégrale** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

- $\forall a \in \mathrm{I}$, $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
- $\forall a, b \in \mathrm{I}$, $\displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- **Relation de Chasles**

$$\forall a, b, c \in \mathrm{I},\quad \int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

Intégrale et inégalité

Soit f et g 2 fonctions continues sur $[a;b]$.

- **Positivité**
  Si $f \geqslant 0$ sur $[a;b]$: $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$
- **Intégration d'une inégalité**
  Si $f \geqslant g$ sur $[a;b]$: $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

⚠ On ne peut rien déduire du signe de f à partir du signe de son intégrale, de même on ne peut pas comparer deux fonctions f et g à partir de la comparaison de leurs intégrales.

Quelques méthodes pour trouver une primitive

1) Le tableau des primitives usuelles.
2) Adapter un coefficient de façon à obtenir une forme que donne une primitive connue.

$$f(x) = \frac{1}{(3x+5)^2} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{(3x+5)^2} = \frac{1}{3} \times \frac{u'(x)}{u^2(x)} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{-1}{3(3x+5)}$$

3) La décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle dans le but de se ramener à 1)

$$f(x) = \frac{4x+5}{2x+1} = 2 + \frac{3}{2x+1} \quad \Rightarrow \quad F(x) = 2x + \frac{3}{2}\ln|2x+1|$$

4) Il arrive parfois que l'on accède à deux intégrales I et J grâce à un système linéaire astucieux.

Forme implicite

- En terminale, on doit parfois se résigner à prédire l'existence de primitives sans parvenir à les exhiber.

  Par exemple, on ne sait pas déterminer l'unique primitive de « ln » qui s'annule en $x = e$ de manière explicite mais on dispose d'une description explicite : $\displaystyle\int_e^x \ln x \, dx$.

- On peut montrer qu'il n'est pas possible d'exprimer une primitive de la fonction de Gauss $x \mapsto e^{-x^2}$ à l'aide de fonction usuelles. Il faut donc parfois se résigner à manipuler des expressions abstraites.

  On retrouve en probabilité cette intégrale dans la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite avec la fonction Φ

  $$\Phi = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

  On peut montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$

Compléments : quelques calculs astucieux d'intégrales

1) $\displaystyle I_1 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln x \, dx = \int_1^e u'(x)u(x) \, dx = \left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^e = \ldots$

2) $\displaystyle I_2 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x} \, dx = \int_e^{e^2} \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln x} \, dx = \int_e^{e^2} \frac{u'(x)}{u(x)} \, dx = \Big[\ln(\ln x)\Big]_e^{e^2} = \ldots$

3) Utilisation des formules trigonométrique de duplication.

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2u(x)u'(x) \, dx = \Big[\sin^2 x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x + 1}{2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\right] dx = \left[\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Intégration par parties

(méthode de calcul désormais hors programme)

- Cette méthode utilise la dérivée du produit : $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

  Soit u et v deux fonctions dérivables, de dérivée continues, sur $[a;b]$.
  (On dit que u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a;b]$)

  $$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx}$$

  En effet :
  $$\Big[u(x)v(x)\Big]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \, dx = \int_a^b u'(x)v(x) \, dx + \int_a^b u(x)v'(x) \, dx \iff$$
  $$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx$$

- Calculer : $\displaystyle I = \int_1^e x\ln x \, dx$, on pose alors $\begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = x & v(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$

  $$I = \int_1^e x\ln x \, dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x \, dx = \frac{1}{2}e^2 - 0 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$
  $$= \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$