L'équation du troisième degré

QUESTION : Comment trouver une solution à une équation de troisième degré

1 Mise en forme

Soit une équation du troisième degré : (E) : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ avec $a \neq 0$

- Comme a est non nul, on divise par a : (E) : $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$

  On pose alors : $b' = \frac{b}{a}$, $c' = \frac{c}{a}$, $d' = \frac{d}{a}$,

  l'équation devient alors : (E) : $x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0$

- On fait un changement de variable pour éliminer le coefficient devant x^2. On pose : $X = x + \frac{b'}{3} \quad \Rightarrow \quad x = X - \frac{b'}{3}$

  On remplace alors dans l'équation (E)

$$\left(X - \frac{b'}{3}\right)^3 + b'\left(X - \frac{b'}{3}\right)^2 + c'\left(X - \frac{b'}{3}\right) + d' = 0$$

$$X^3 - b'X^2 + \frac{b'^2}{3}X - \frac{b'^3}{27} + b'X^2 - \frac{2b'}{3}X + \frac{b'^3}{9} + c'X - \frac{b'c'}{3} + d' = 0$$

$$X^3 + \left(\frac{b'^2}{3} - \frac{2b'^2}{3} + c'\right)X - \frac{b'^3}{27} + \frac{b'^3}{9} - \frac{b'c'}{3} + d' = 0$$

$$X^3 + \left(-\frac{b'^2}{3} + c'\right)X + \frac{2b'^3}{27} - \frac{b'c'}{3} + d' = 0$$

  On pose alors : $p = -\frac{b'^2}{3} + c'$ et $q = \frac{2b'^3}{27} - \frac{b'c'}{3} + d'$

  On obtient alors : (E') : $X^3 + pX + q = 0$

On appelle **équation réduite** du 3$^{\text{e}}$ degré, l'équation du type : $x^3 + px + q = 0$

2 L'équation du 3$^{\text{e}}$ degré a au moins une solution

On pose la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + px + q$

- On calcule les limites en $+\infty$ et $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (car c'est un polynôme) et $0 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une solution à l'équation $f(x) = 0$

3 La formule de Cardan

Au XVI[e] siècle, des algébristes italiens ont découvert une méthode pour calculer une racine d'un polynôme du 3[e] degré donné sous la forme réduite : $x^3 + px + q$

- Pour tous réel u et v on a :

$$\begin{aligned}(u+v)^3 &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3\\ &= 3uv(u+v) + (u^3+v^3)\end{aligned}$$

$$(\text{R}) \quad (u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = 0$$

- L'observation de cette relation (R), semblable à la forme réduite conduit à poser comme changement de variable $x = u + v$

  En identifiant cette relation (R) avec $(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$ permet de poser :

$$p = -3uv \qquad \text{et} \qquad q = -(u^3+v^3)$$

  Pour des raisons d'homogénéité, on préfère poser :

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \qquad \text{et} \qquad (u^3+v^3) = -q$$

  Enfin pour simplifier les calculs on pose : $a = u^3$ et $b = v^3$, on a alors :

$$ab = -\frac{p^3}{27} \qquad \text{et} \qquad a + b = -q$$

- On est revenu à un problème où l'on connaît la somme $S = a + b$ et le produit $P = ab$. On sait que a et b sont alors solution de l'équation du second degré : $X^2 - SX + P$

  On calcule de discriminant : $\Delta = S^2 - 4P = q^2 + \dfrac{4p^3}{27} = \dfrac{4p^3 + 27q^2}{27}$

- Si $4p^3 + 27q^2 \geqslant 0$, on obtient alors les solutions :

$$a = \frac{S - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-q - \sqrt{q^2 + \dfrac{4p^3}{27}}}{2} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{S + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-q + \sqrt{q^2 + \dfrac{4p^3}{27}}}{2}$$

  Comme a et b sont les cubes respectifs de u et v et comme $x = u + v$, on obtient alors :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}$$

  En rentrant le $\frac{1}{2}$ dans la racine, on obtient alors :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

- Exemple : résoudre $x^3 + 3x + 2 = 0$

  On a alors : $p = 3$ et $q = 2$ la formule de Cardan donne :

$$x = \sqrt[3]{-1 - \sqrt{1+1}} + \sqrt[3]{-1 + \sqrt{1+1}} = \sqrt[3]{-1 - \sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}} \simeq -0,596071\ldots$$

4 L'astuce de Bombelli

Nous avons vu dans la partie B que toute équation du troisième degré admet au moins une solution. Comment faire pour trouver cette solution quand $4p^3 + 27q^2 < 0$

Bombelli est parti d'une équation où il connaissait une solution évidente.
Soit $x^3 - 15x - 4 = 0$

- $x = 4$ est solution de cette équation en effet : $4^3 - 15 \times 4 - 4 = 0$
- $4p^3 + 27q^2 = 4 \times (-15)^3 + 27 \times (-4)^2 = -13\,068 < 0$

  En appliquant malgré tout la formule de Cardan, on obtient :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} \\ &= \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

  Bombelli ne se décourage pas et décide provisoirement pour les calculs de poser : $(\sqrt{-1}^2 = -1$. Il obtient alors après des calculs sur les cubes :

$$x = 2 - \sqrt{-1} + 2 + \sqrt{-1} = 4$$

- En application de la formule de Cardan, on peut toujours essayer de résoudre :

$$x^3 - 14x - 12 = 0$$

  Pour la petite histoire cette équation figurait parmi les questions auxquelles Einstein a répondu à l'occasion de l'épreuve d'algèbre de son baccalauréat en 1896 !

Biographie

On ne sait pratiquement rien de la vie de Bombelli, sinon qu'il est né à Bologne en 1526. Il fut le premier des grands mathématiciens italiens du XVI^{e} siècle à apporter une importante contribution à l'étude des équations algébriques du 3^{e} et du 4^{e} degré. Peu de temps avant sa mort, il publie un ouvrage, *Algebra, parte maggiore dell'aritmetica, divisa in tre libri* (Bologne, 1572), qui contient un exposé systématique des récentes découvertes en algèbre. Dans la préface du livre, il trace l'histoire de l'algèbre, parlant de Diophante, encore inconnu en Europe. Il traite de la théorie des équations dont il étudie les racines, réelles et complexes, et montre que, dans le cas d'une équation cubique irréductible, les trois racines sont réelles. La définition qu'il donne des nombres négatifs et des nombres complexes et les règles de calcul qu'il utilise sont d'une forme très voisine de celle qu'on leur donne à notre époque.

Il faut remarquer aussi que Bombelli, dans cet ouvrage, utilise une notation symbolique, premier essai de syntaxe algébrique moderne ; il désigne une inconnue par le symbole 1 souligné d'un demi-cercle, le carré de cette inconnue par le symbole 2 souligné d'un demi-cercle, etc.