

# Géométrie plane et configurations

## 1 Les quadrilatères

### 1.1 Le parallélogramme

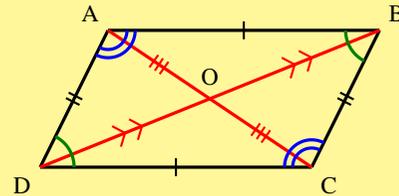
**Définition 1** Un parallélogramme est un quadrilatère dont :

- 1) les côtés opposés sont deux à deux parallèles.
- 2) les côtés opposés sont deux à deux de même longueur.
- 3) deux côtés sont parallèles et de même longueur.
- 4) les diagonales se coupent en leur milieu.
- 5) deux angles consécutifs quelconques sont supplémentaires.
- 6) les angles opposés sont égaux deux à deux.

Ces six définitions sont équivalentes

Relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$



### 1.2 Le losange

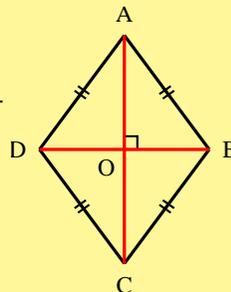
**Définition 2**

Un losange est un quadrilatère dont :

- 1) les 4 côtés sont de même longueur.
- 2) les diagonales se coupent en leur milieu perpendiculairement.

Un losange est un parallélogramme dont :

- 1) deux côtés consécutifs sont de même longueur.
- 2) les diagonales sont perpendiculaires



### 1.3 Le rectangle

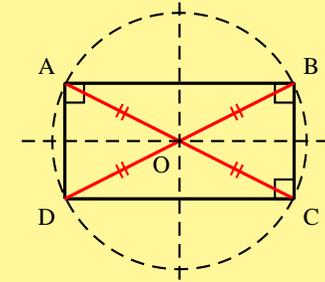
**Définition 3**

Un rectangle est un quadrilatère

- 1) qui a trois angles droits.
- 2) dont les diagonales sont de même longueur et qui se coupent en leur milieu.

Un rectangle est un parallélogramme

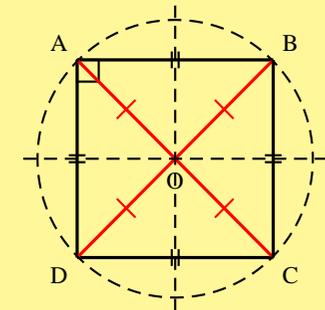
- 1) qui a 1 angle droit.
- 2) dont les diagonales sont de même longueur.



### 1.4 Le carré

**Définition 4**

- 1) Un carré est un losange et un rectangle.
- 2) Un carré est un quadrilatère qui a ses 4 côtés de même longueur et 1 angle droit.
- 3) Un carré est un quadrilatère dont les diagonales de même longueur, se coupent en leur milieu perpendiculairement.



### 1.5 Le trapèze

**Définition 5**

- 1) Un trapèze est un quadrilatère qui a 2 côtés parallèles.
- 2) Un trapèze rectangle est un trapèze qui possède un angle droit.
- 3) Un trapèze isocèle est un trapèze qui possède un axe de symétrie.

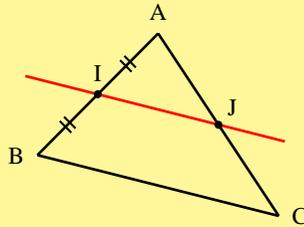
## 2 Le triangle

### 2.1 Le théorème des milieux

#### Théorème 1

##### Le théorème direct

Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un deuxième côté coupe le troisième en son milieu.



$I = m[AB]$  et  $(IJ) // (BC) \Rightarrow$

$$J = m[AC] \text{ et } IJ = \frac{1}{2}BC \Leftrightarrow \vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{BC}$$

##### La réciproque

Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu de deux côtés est parallèle au troisième.

$$I = m[AB] \text{ et } J = m[AC] \Rightarrow (IJ) // (BC) \text{ et } IJ = \frac{1}{2}BC \Leftrightarrow \vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{BC}$$

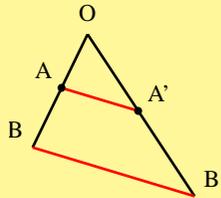
### 2.2 Le théorème de Thalès

#### Théorème 2 :

##### Le théorème direct

Soit deux droites  $(AB)$  et  $(A'B')$  sécantes en  $O$ .

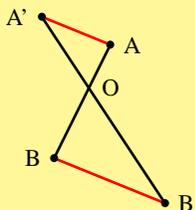
$$\text{Si } (AA') // (BB') \text{ alors } \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}$$



##### La réciproque

Soit  $O, A, B$  d'une part et  $O, A', B'$  d'autre part alignés dans cet ordre.

$$\text{Si } \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \text{ alors, on a : } (AA') // (BB')$$

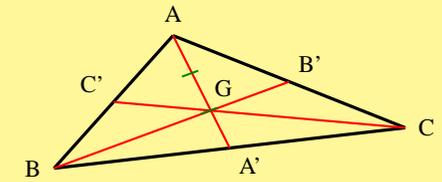


### 2.3 Droites remarquables

#### Définition 6

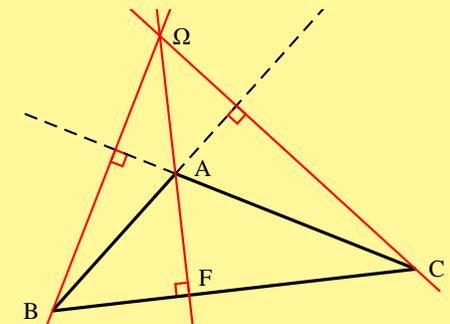
1) Une **médiane** d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé.

Propriété : Les trois médianes sont concourantes en  $G$  **centre de gravité**. Il est situé au deux tiers du sommet ou à un tiers de la base.



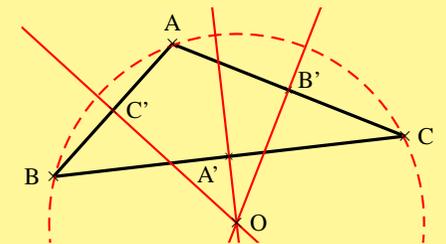
2) Une **hauteur** d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé.

Propriété : les trois hauteurs sont concourantes en  $\Omega$  l'**orthocentre**.



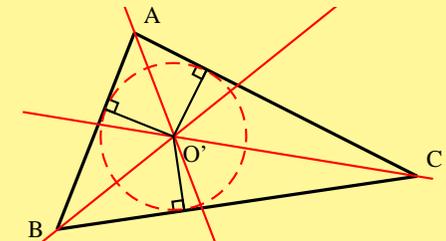
3) La **médiatrice** d'un segment  $[AB]$  est la droite dont les points sont équidistants des points  $A$  et  $B$ . Elle coupe alors ce segment en son milieu perpendiculairement.

Propriété : Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en  $O$  centre du **cercle circonscrit**.



4) La **bissectrice** d'un angle divise celui-ci en deux parties égales.

Propriété : Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point  $O'$  centre du **cercle inscrit**.



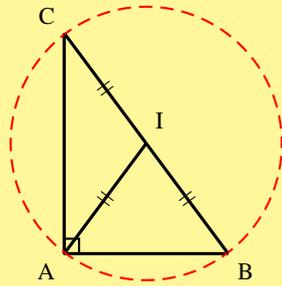
## 2.4 Le triangle rectangle

### Théorème 3

#### Centre du cercle circonscrit

Le centre du cercle circonscrit dans un triangle rectangle se trouve au milieu de l'hypoténuse.

Réciproquement, le triangle ABC inscrit dans un cercle de diamètre [BC] est rectangle en A



#### Théorème de Pythagore

Si ABC est rectangle en A, on a :  $BC^2 = AB^2 + AC^2$

#### Réciproque

Si le triangle ABC est tel que :  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ , alors le triangle ABC est rectangle en A

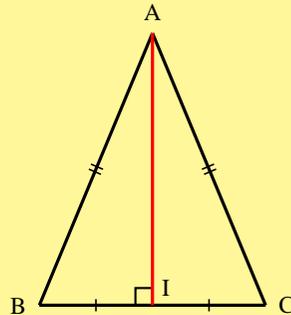
## 2.5 Le triangle isocèle

### Définition 7

Un triangle ABC est isocèle en A si et seulement si :  $AB = AC$

#### Propriétés

- 1) la médiane et la hauteur issues de A, la médiatrice de [BC] et la bissectrice de  $\hat{A}$  sont confondues. La hauteur issue de A coupe donc [BC] en son milieu.
- 2)  $\widehat{B} = \widehat{C}$
- 3) (AH) est un axe de symétrie du triangle ABC.



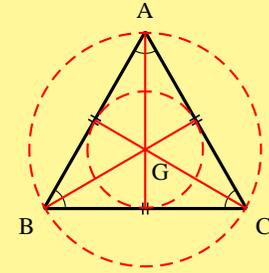
## 2.6 Le triangle équilatéral

### Définition 8

Un triangle est équilatéral si et seulement si ses trois côtés sont de même longueur.

Les angles du triangle valent à  $\frac{\pi}{3}$

Les médianes, les hauteurs, les médiatrices et les bissectrices sont confondues.



Dans un triangle équilatéral de côté  $a$  :

- 1) Les quatre centres du triangle sont donc confondus.
- 2) les trois médianes ou médiatrices ou hauteurs ou bissectrices sont axes de symétrie du triangle ABC.
- 3) la longueur d'une hauteur est égal à :  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

## 2.7 Angles dans un cercle

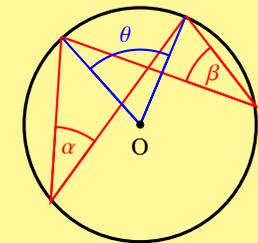
### Théorème 4

- 1) Dans un cercle, l'angle au centre vaut deux fois l'angle inscrit. On a alors :

$$\theta = 2\alpha$$

- 2) Dans un cercle, deux angles qui interceptent le même arc sont égaux. On a alors :

$$\alpha = \beta$$



### 3 Construction dans le plan

Réalisation d'une figure à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas.

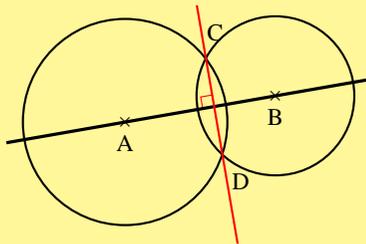
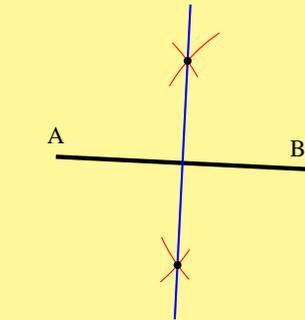
#### 3.1 Médiatrice

La médiatrice d'un segment  $[AB]$  est la droite dont les points sont équidistants des points A et B.

**Intérêt :** Permet de déterminer le milieu d'un segment sans utiliser une règle graduée ou de tracer une perpendiculaire à une droite donnée sans utiliser une équerre.

**Exemple :** Tracer la perpendiculaire à la droite  $(AB)$  passant par un point C extérieur à cette droite.

On reporte la distance AC et la distance BC à partir respectivement de A et B. On obtient ainsi un point D. Comme A et B sont équidistants de C et D, la droite  $(AB)$  est la médiatrice de  $[CD]$  donc  $(AB) \perp (CD)$

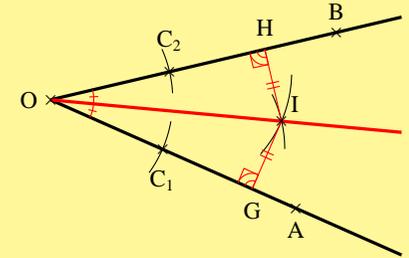


#### 3.2 Bissectrice

Les points de la bissectrice sont équidistants des deux demi-droites qui compose l'angle. Cette propriété permet de tracer la bissectrice d'un angle à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas.

**Intérêt :** Permet de tracer des angles de  $30^\circ$  ou  $45^\circ$ .

Pour déterminer le point I de la bissectrice de  $\widehat{AOB}$ , on reporte à partir de O une même distance. On obtient ainsi les points  $C_1$  et  $C_2$ . A partir de ces deux points, on reporte une même distance pour obtenir le point I.



#### 3.3 Parallélogramme

**Exemple :** Tracer la parallèle à une droite  $(AB)$  donnée passant par un point extérieur C à cette droite.

Tracer cette droite revient à tracer le point D tel que  $ABDC$  soit un parallélogramme. On reporte donc la distance AC à partir de B et la distance AB à partir de C. On obtient ainsi le point D. La droite cherchée est la droite  $(CD)$ .

