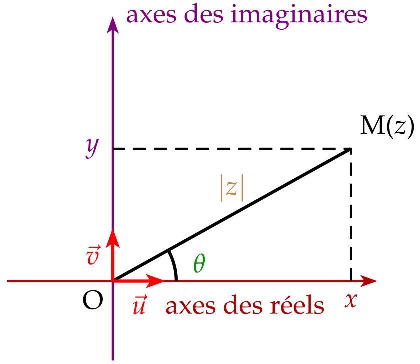
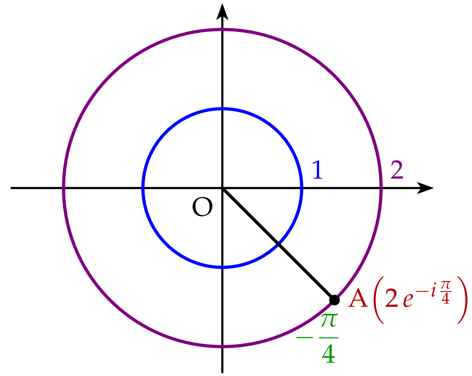
$z \in \mathbb{R}^* \iff \text{Im}(z) = 0$
$\iff z = \bar{z}$
$\iff \arg(z) = 0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Forme algébrique

$$z = x + iy \text{ où } \begin{cases} x = \text{Re}(z) \\ y = \text{Im}(z) \end{cases}$$



Construire à la règle et au compas le point A d'affixe : $2\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$



- **Module** : $|z| = \text{OM} = \sqrt{x^2 + y^2}$

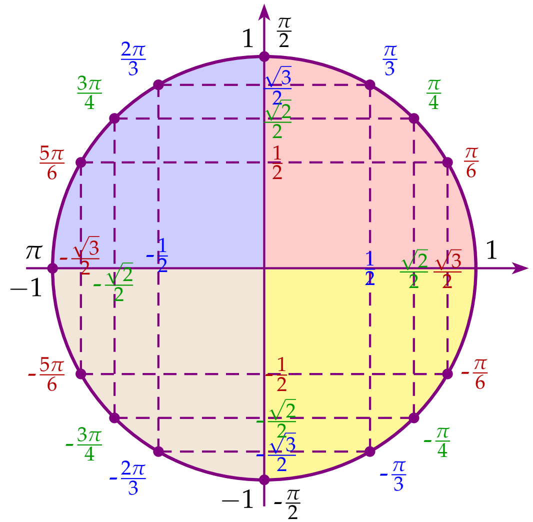
  $|z| = 0 \iff z = 0$

Forme trigonométrique

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$
où $|z| \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$

- **Argument** : $(\vec{u}, \overrightarrow{\text{OM}}),\ |z| \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \theta + 2k\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{array}$$



$\cos\theta \leqslant 0$ $\sin\theta \geqslant 0$	$\cos\theta \geqslant 0$ $\sin\theta \geqslant 0$
$\cos\theta \leqslant 0$ $\sin\theta \leqslant 0$	$\cos\theta \geqslant 0$ $\sin\theta \leqslant 0$

Forme exponentielle

$z = |z|\,e^{i\theta} = r\,e^{i\theta}$

Valeurs remarquables

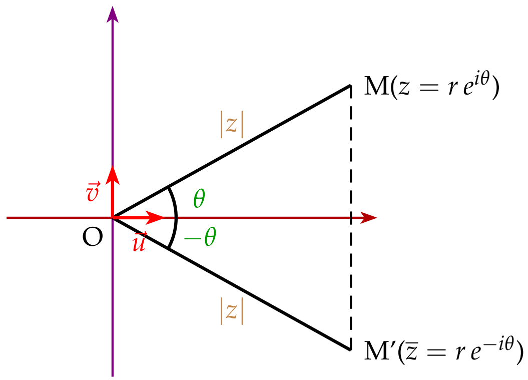
- $e^{i\,0} = 1$
- $e^{i\,\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{i\,\pi} = -1$
- $e^{-i\,\frac{\pi}{2}} = -i$

$z \in i\,\mathbb{R}^* \iff \text{Re}(z) = 0$
$\iff z = -\bar{z}$
$\iff \arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Formule d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$



- $\text{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$
- $\text{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

Les figures géométriques

C'est au XIXe siècle, grâce à Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que l'aspect géométrique des nombres complexes gagne ses lettres de noblesse.

Les points

- A, B, C sont trois points alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires c'est à dire ssi

$$z_{\overrightarrow{AC}} = kz_{\overrightarrow{AB}} \Leftrightarrow z_C - z_A = k(z_B - z_A)$$

- A, B, C sont trois points alignés ssi :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0 + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

Les cercles

- $M \in \mathscr{C}(\Omega, r) \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow |z_M - z_\Omega| = r$
- $M \in \mathscr{C}(\Omega, r) \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2 \Leftrightarrow$

$$(x_M - x_\Omega)^2 + (y_M - y_\Omega)^2 = r^2$$

Reconnaître une équation de cercle

Exemple : Soit $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 + x + y - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + y^2 + y - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$$

$\mathscr{C}$ est de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $r = \sqrt{\frac{13}{2}}$

Les droites

- Si (D) n'est pas une droite verticale, elle admet une équation réduite de la forme : $y = mx + p$.
- Toute droite (D) admet comme équation cartésienne :

$$ax + by + c = 0$$

- Droites particulières :
  1) L'axe des abscisses a pour équation : $y = 0$
  2) L'axe des ordonnées a pour équation : $x = 0$
  3) Si M est un point de la médiatrice de [AB]
     $\Leftrightarrow \ AM = BM \ \Leftrightarrow \ |z_M - z_A| = |z_M - z_B|$

Triangle rectangle

- ABC rectangle en A $\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
- ABC rectangle en A $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\,\mathbb{R} \text{ (imaginaire pur)}$$

- Si on joint un point M aux extrémités d'un diamètre [AB] alors ABM est rectangle en M.

Triangle isocèle

- ABC isocèle en A $\Leftrightarrow$ AB = AC $\Leftrightarrow$

$$|z_B - z_A| = |z_C - z_A|$$

- ABC isocèle rectangle en A $\Leftrightarrow$

$$AB = AB \text{ et } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$$

Triangle équilatéral

- ABC est équilatéral $\Leftrightarrow$
  $|z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |z_C - z_B|$
- ABC équilatéral
  $\Leftrightarrow$ ABC isocèle en A et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} + k\pi$