Les nombres complexes

Le point de vue de l'algèbre

Définition

Soit $\mathbb{C} = \{z = x + iy,\ (x;y) \in \mathbb{R}^2\}$, avec $i^2 = -1$

L'écriture $z = x + iy$ est appelé forme algébrique de z.

On pose : $\begin{cases} \text{Re}(z) = x \in \mathbb{R} & \text{la partie réelle} \\ \text{Im}(z) = y \in \mathbb{R} & \text{la partie imaginaire} \end{cases}$

Puissances de i : Soit k un entiers relatif, on a :

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i$$

Forme algébrique

L'écriture algébrique d'un nombre complexe est **unique**.

Conséquences :

- Égalité de deux nombres complexes :

$$z = z' \Leftrightarrow x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

- Cas particulier :

$$z = 0 \Leftrightarrow x + iy = 0 + i0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0' \\ y = 0 \end{cases}$$

Comme $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ est **intègre**, c'est à dire que dans $\mathbb{C}$ le théorème du produit nul est vérifié :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad zz' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0 \text{ ou } z' = 0$$

⚠ On ne dispose plus dans $\mathbb{C}$ de la relation d'ordre usuelle "$\leqslant$" ou "$\geqslant$"

Cas particuliers

- Si $\text{Im}(z) = 0$ alors $z = x \in \mathbb{R}$ ainsi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

  Muni du produit $(\times)$ et de l'addition $(+)$ usuelles, $\mathbb{C}$ apparaît comme une extension de $\mathbb{R}$ préservant les propriétés algébrique classiques :associativité, distributivité, commutativité.
  On note parfois : $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ pour traduire l'extension ...

- Si $\text{Re}(z) = 0$ alors $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$.

  On dit alors que z est un imaginaire pur.

Équation du second degré à coefficients réels

Typiquement : $az^2 + bz + c = 0$ où $a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}$.

Méthode : On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta \geqslant 0$, racines réelles (cf 1S)
- Si $\Delta < 0$, 2 racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

⚠ Pour les équations polynomiale de drégé $\geqslant 2$ à coefficient complexe, le texte vous guidera.

Conjugué

On appelle **conjugué** du complexe z, le complexe $\bar{z}$ tel que :

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \overline{x + iy} \\ &= x - iy \end{aligned} \quad \text{ainsi} \quad \begin{cases} \text{Re}(\bar{z}) = \text{Re}(z) \\ \text{Im}(\bar{z}) = -\text{Im}(z) \end{cases}$$

Propriétés (ROC) : $\forall\, z, z' \neq 0 \in \mathbb{C}, \quad \bar{\bar{z}} = z$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} \quad , \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad , \quad \overline{z^n} = (\bar{z})^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Caractérisations : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$

$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Mettre un complexe sous forme algébrique

- **Outil** : $\forall z \in \mathbb{C}, \ z\bar{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$
- **Exemple** :

$$z = \frac{1 - 3i}{1 - 2i} = \frac{(1 - 3i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{1 + 2i - 3i + 6}{1^2 + 2^2} = \boxed{\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i}$$

Autres équations

1) Équations de degré 3 à coefficients réels :

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

- On détermine une racine évidente α
- On en déduit une factorisation par $(z - \alpha)$
- On conclut grâce au théorème du produit nul.
- Exemple : résoudre $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0$.

2) Équations impliquant z et $\bar{z}$.

- On pose $z = x + iy$ puis on utilise l'unicité de l'écriture algébrique pour déterminer x et y en identifiant partie réelle et partie imaginaire à l'aide d'un système.
- Exemple : $\bar{z} - 3i\,z - 3 + 6i = 0$

Complément (dans la lignée du programme)

Théorème : Tout polynôme à coefficients réels admet un nombre pair de racines complexes non réelles. Ces racines sont alors conjuguées deux à deux.

Soit un polynôme P de degré n à coefficients réels :

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k = a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_1\, z + a_0$$

On suppose que z_0 est racine de P, montrons alors que $\overline{z_0}$ est aussi racine de P.

$$\begin{aligned}
P(z_0) = 0 \;&\Leftrightarrow\; \overline{P((z_0)} = \overline{0}\\
&\Leftrightarrow\; \overline{a_n\, z_0^n + a_{n-1}\, z_0^{n-1} + \cdots + a_1\, z_0 + a_0} = \overline{0}\\
&\Leftrightarrow\; \overline{a_n\, z_0^n} + \overline{a_{n-1}\, z_0^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1\, z_0} + \overline{a_0} = 0\\
&\Leftrightarrow\; \overline{a_n}\,\overline{z_0^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z_0^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{z_0} + \overline{a_0} = 0
\end{aligned}$$

Comme les coefficients sont réels, $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $\overline{a_k} = a_k$ et $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\; a_n\, \overline{z_0}^n + a_{n-1}\, \overline{z_0}^{n-1} + \cdots + a_1\, \overline{z_0} + a_0 = 0\\
&\Leftrightarrow\; \overline{z_0} \text{ racine du polynôme } P
\end{aligned}$$

Culture

Théorème fondamental de l'algèbre : Tout polynôme de degré $n \geqslant 1$ à coefficients complexes admet exactement n racines distinctes ou non.

Théorème conjecturé par d'Alembert (1717-1783) et démontré par Gauss (1777-1855).

Exemple : Racines 4e de l'unité,

$$z^4 - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; (z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = 0$$

On en déduit les 4 racines 4e de l'unité : $S_{\mathbb{C}} = \{-1\,;\,1\,;\,-i\,;\,i\}$.