Les probabilités discrètes

Définition

Ω : l'univers, ensemble des n issues d'une expérience aléatoire.

A : événement, sous-ensemble de l'univers Ω

$\overline{A}$: événement contraire, complémentaire de A dans Ω

La loi de probabilité sur l'ensemble Ω, est la fonction p à valeur dans $[0\,;\,1]$ définie par les conditions suivantes :

- $p(\Omega) = 1$
- Si A et B incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Propriétés

Soit $e_1, e_2, \dots, e_n$ les n événements élémentaires de Ω

- $p(e_1) + p(e_2) + \cdots + p(e_n) = 1$
- $p(\varnothing) = 0$
- Pour tout événements A et B, on a les relations :

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) \quad \text{et} \quad p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Indépendance

Deux événements A et B d'un univers Ω sont dits indépendants ssi :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Autres formulations avec $p(A) \neq 0$ et $(B) \neq 0$

$$p_A(B) = p(B) \quad \text{ou} \quad p_B(A) = p(A)$$

Conséquence : Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont également. (ROC)

Variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un univers Ω avec :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Loi de probabilité de X : on pose $p_i = p(X = x_i)$

$X = x_i$	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$\sum p_i$
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n	1

Paramètres d'une variable aléatoire

- Espérance : $E(X) = \sum x_i p_i$
- Variance : $V(X) = \sum p_i x_i^2 - E^2(X)$
- Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Cas particulier : Si $E(X)$ représente un gain moyen, le jeu est équitable si $E(X) = 0$, favorable au joueur si $E(X) > 0$ et défavorable au joueur si $E(X) < 0$

Cas d'équiprobabilité

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité de se réaliser, on a :

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

Probabilité conditionnelle

Soit A, un événement de probabilité non nulle.

On pose : $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

On lit « probabilité que B soit réalisé sachant que A est réalisé ». On parle de probabilité conditionnelle

⚠ Bien interpréter les énoncés et à ne pas confondre $p(A \cap B)$ et $p_A(B)$ …

Détecteur de condition : « parmi », « sachant que », « On a B. Quelle est la probabilité de A », « Si B, probabilité de A »

Partition de Ω

Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ une partition de Ω, alors les événements A_i sont deux à deux incompatibles et :

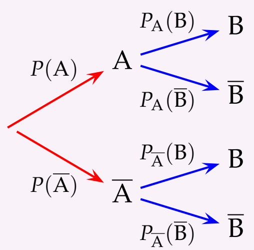
$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$$

Probabilité totale : pour tout événement B on a

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B)$$

Cas fréquent en terminale : partition A et $\overline{A}$

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = p(A)p_A(B) + p(\overline{A})p_{\overline{A}}(B)$$



La loi binomiale - Incontournable

- On reconnaît un schéma de Bernoulli lorsque l'on répète de manière identique et indépendante une expérience de Bernoulli, c'est à dire une expérience aléatoire à 2 issues : le succès de probabilité p et l'échec de probabilité $q = 1 - p$.
- Si l'on note X la variable aléatoire associée au nombre de succès sur n expériences de Bernoulli, X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, n et p sont appelés paramètres de la loi.

Notations compactes possibles : $X \longrightarrow \mathscr{B}(n, p)$ ou $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

On retient : probabilité d'obtenir exactement k succès sur n expériences :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

Dans ce cas : $E(X) = np$, $V(X) = npq$ et $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

Quelques variantes fréquentes au Bac. . . : on suppose que $X \sim \mathscr{B}(n, p)$

- Au moins 1 succès : $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0)$
- Au plus 1 succès : $p(X \leqslant 1) = p(X = 0) + p(X = 1)$
- Entre 30 et 45 succès : $p(30 \leqslant X \leqslant 45) = p(X \leqslant 45) - p(X \leqslant 29)$

Point culture

- Si $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k}$ est appelé « coefficient binomial ». Il peut s'écrire :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

où $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \times 1$ « on lit factorielle n »

⚠ $0! = 1$ et $(n+1)! = (n+1)n!$

- **Triangle de Pascal** (1623-1662)

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	. . .
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

- **Formule de Pascal** : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Culture - Formule de Bayes

Cette formule est aussi appelée « théorème de la probabilité des causes », car elle permet de renverser un conditionnement. On l'obtient en remarquant que la probabilité d'une intersection $A \cap B$ peut s'écrire soit en conditionnant A par B, soit en conditionnant B par A :

$$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)$$

Comme par ailleurs

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}) = p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p(\overline{A})$$

On obtient la formule : $p(B) \neq 0$

$$P_B(A) = \frac{p_A(B)p(A)}{p_A(B)p(A) + p_{\overline{A}}(B)p(\overline{A})}$$