Révision : fonctions exponentielle et logarithme

EXERCICE 1

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x^2}$

1) a) Étudier la limite de f en 0. Que peut-on en déduire ?
   b) Étudier la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire ?
2) Montrer que la fonction dérivée f' de la fonction f peut s'écrire sous la forme :
$$f'(x) = \frac{-1-2\ln x}{x^3}$$
3) a) Étudier le signe de f'
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4) Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f.
5) a) Montrer que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x) = \dfrac{-2-\ln x}{x}$ est une primitive de la fonction f.
   b) Calculer la valeur exacte puis donner une valeur approchée au centième de l'aire $\mathscr{A}$ délimitée par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ et $x = 2$.

EXERCICE 2

Liban 27 mai 2014

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x) = x\,e^{-x}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Partie A

1) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
   Pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, calculer $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
2) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

Partie B

Soit $\mathscr{A}$ la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ de la façon suivante : pour tout réel t de l'intervalle $[0;+\infty[$, $\mathscr{A}(t)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$.

1) Déterminer le sens de variation de la fonction $\mathscr{A}$.
2) On admet que l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses est égale à 1 unité d'aire. Que peut-on en déduire pour la fonction $\mathscr{A}$?

3) On cherche à prouver l'existence d'un nombre réel α tel que la droite d'équation $x = \alpha$ partage le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, en deux parties de même aire, et à trouver une valeur approchée de ce réel.

   a) Démontrer que l'équation $\mathscr{A}(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

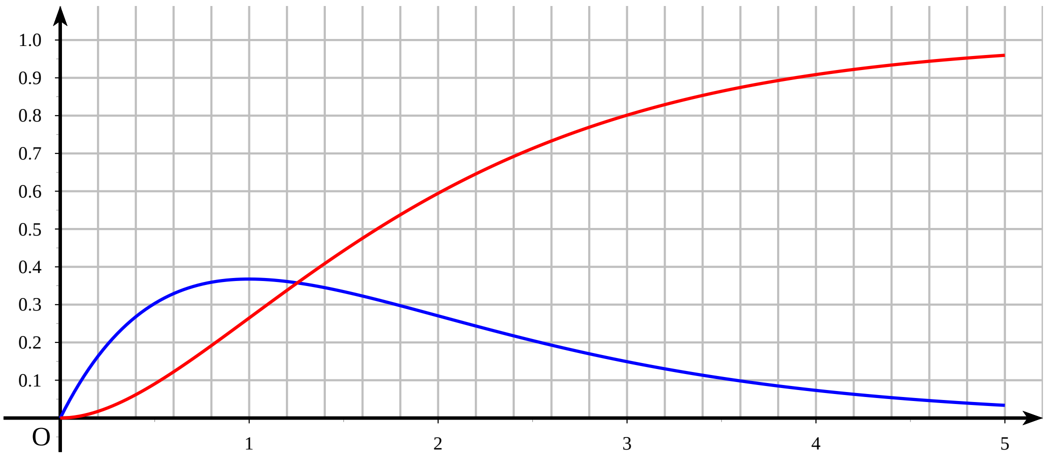
   b) Sur le graphique fourni en annexe (à rendre avec la copie) sont tracées la courbe $\mathscr{C}$, ainsi que la courbe Γ représentant la fonction $\mathscr{A}$.
   Sur le graphique de l'annexe, identifier les courbes $\mathscr{C}$ et Γ, puis tracer la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$. En déduire une valeur approchée du réel α.
   Hachurer le domaine correspondant à $A(\alpha)$.

4) On définit la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = (x+1)e^{-x}$.

   a) On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
   Pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, calculer $g'(x)$.

   b) En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$, une expression de $\mathscr{A}(t)$.

   c) Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathscr{A}(6)$.



Exercice 3

Questions

1) Définition de l'intégrale d'une fonction f continue positive sur $[a; b]$.
2) Citer le théorème fondamental de l'intégration. Comment le démontre-t-on dans le cas d'une fonction croissante ?
3) Définition d'une primitive d'une fonction f sur un intervalle I.
4) Quelle est la condition suffisante à l'existence de primitive. Comment le démontre-t-on pour un intervalle fermé $[a; b]$?
5) Primitives des fonctions élémentaires, et règles d'intégration.
6) Comment calcule-t-on l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$
7) Propriétés algébrique de l'intégrale. Intégrales et inégalités.
8) Valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.