Révision : Raisonnement par récurrence et suites

EXERCICE 1

Amérique du Nord mai 2014

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.
Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.
On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient 1 400 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1400$.

1) Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?
2) Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + 330$.
3) L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1 100.
   Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

Variables :	n est un entier naturel a est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à a la valeur 800
Traitement :	Tant que $a < 1100$, faire : Affecter à a la valeur .... Affecter à n la valeur $n+1$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

4) Pour tout entier naturel n, on note $u_n = a_n - 1320$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer u_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = 1320 - 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

5) On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.
Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

Exercice 2

N[lle] Calédonie novembre 2013

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

PARTIE A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N est un entier
	U, V, W sont des réels
	K est un entier
Début :	Affecter 0 à K
	Affecter 2 à U
	Affecter 10 à V
	Saisir N
	Tant que $K < N$
	Affecter $K + 1$ à K
	Affecter U à W
	Affecter $\frac{2U + V}{3}$ à U
	Affecter $\frac{W + 3V}{4}$ à V
	Fin tant que
	Afficher U
	Afficher V
Fin	

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

PARTIE B

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.

b) Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

2) a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

b) Déduire des résultats des questions 1b). et 2a) que pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

c) En déduire que tes suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4) Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.
En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\dfrac{46}{7}$.