Révision : Fonctions exponentielle et logarithme

EXERCICE 1

Liban mai 2016

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{3}{4+6e^{2x}}$

L'affirmation suivantes est-elle vraie ou fausse. On se justifiera.

« L'équation $f(x) = 0,5$ admet $\dfrac{\ln 3}{2}$ comme unique solution sur $\mathbb{R}$. »

EXERCICE 2

Antilles-Guyane juin 2016

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = x\,e^{1-x^2}$.

1) Montrer que pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \dfrac{e}{x} \times \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$.

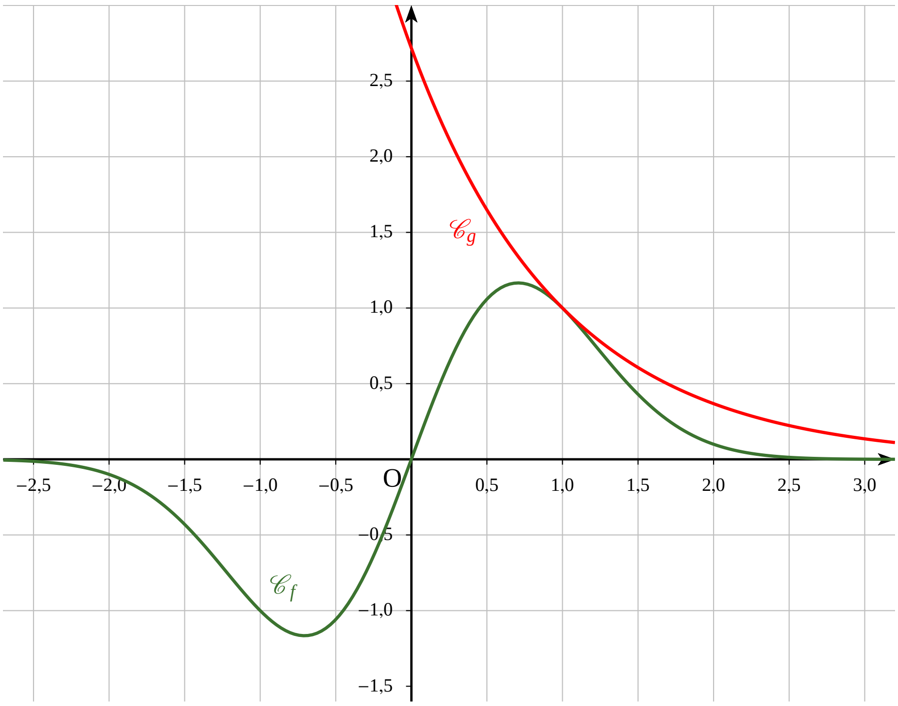
2) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

3) a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa dérivée.
Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \left(1-2x^2\right)e^{1-x^2}$.

b) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par : $g(x) = e^{1-x}$.
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1) Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2) Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty\ ;\ 0]$, $f(x) < g(x)$.
3) Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.
   a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif, $f(x) \leqslant g(x)$ équivaut à $\Phi(x) \leqslant 0$.

      On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.
   b) On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ. (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)
   c) En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leqslant 0$.
4) a) La conjecture émise à la question 1) de la partie B est-elle valide ?
   b) Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un unique point commun, noté A.
   c) Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

Exercice 3

Antille-Guyane sept 2016

Soit la fonction f définie et dérivable pour tout nombre réel x par : $f(x) = e^{-x} \sin x$.

Une seule des propositions suivantes est exacte. On choisira la proposition exacte en se justifiant.

- La fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{4}\ ;\ +\infty\right[$.
- Soit f' la fonction dérivée de f. On a $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.
- La fonction f est positive sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
- Soit F la fonction définie, pour tout réel x, par : $F(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$.
  La fonction F est une primitive de la fonction f.