Révision : suites et raisonnement par récurrence

EXERCICE 1

Pondichéry avril 2015

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation :

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.

1) Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.
2) En déduire que si $a \in]-1\,;\,1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants. Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1) Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?
2) Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015 + n)$.
   a) Justifier que, pour tout entier naturel n, $h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.
   b) Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n). Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
   c) La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2

Liban mai 2015

On définit la suite (u_n) de la façon suivante : pour tout entier naturel n, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

1) Calculer $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.
2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$.
   b) En déduire la valeur exacte de u_1.
3) a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

```
Variables : i, n entiers  u réel
Entrées et initialisation
    Saisir n
    Affecter à u la valeur ...
Traitement
    pour i variant de 1 à ... faire
        Affecter à u la valeur ...
    fin
Sorties : Afficher u
```

b) À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,693 1	0,306 9	0,193 1	0,140 2	0,109 8	0,090 2	0,047 5	0,009 9	0,005 0

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

4) a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

5) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Démontrer que $\ell = 0$.

Exercice 3

Antilles-Guyane septembre 2015

1) On définit une suite (u_n) de réels strictement positifs par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad \ln u_{n+1} = \ln u_n - 1.$$

La suite (u_n) est-elle géométrique ?

2) Soit (v_n) une suite à termes strictement positifs.
On définit la suite (w_n) par, pour tout entier naturel n, $w_n = 1 - \ln v_n$.
La proposition $(\mathcal{P})$ suivante est-elle vraie ou fausse ?

$$(\mathcal{P}) : \text{si la suite } (v_n) \text{ est majorée alors la suite } (w_n) \text{ est majorée.}$$

3) La suite (z_n) de nombres complexes est définie par :

$$z_0 = 2 + 3i \text{ et, pour tout entier naturel } n \text{ par } z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{4}\right) z_n.$$

Pour quelles valeurs de n, $|z_n|$ est-il inférieur ou égal à 10^{-20} ?

Exercice 4

Pondichéry avril 2016

On souhaite stériliser une boîte de conserve. Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25$ °C et on la place dans un four à température constante $T_F = 100$ °C.

La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85 °C.

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.
Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

```
Variables : i, n entiers  T réel
Entrées et initialisation
    Demander la valeur de n
    T prend la valeur 25
Traitement
    pour i variant de 1 à n faire
        T prend la valeur 0,85 × T + 15
    fin
Sorties : Afficher T
```

1) Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes. Arrondir à l'unité.

2) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.

3) Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-t-elle ?