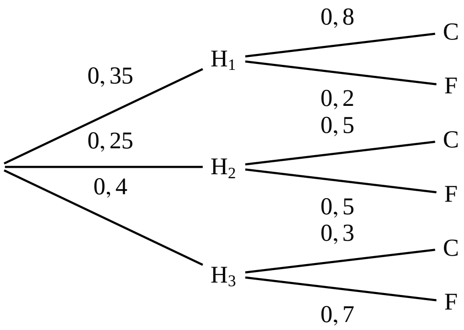
Métropole 20 juin 2013

Mathématiques

Exercice 1 **(5 points)**

1) a) On obtient l'arbre suivant :



b) $P(H_3 \cap C) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$

c) $P(C) = P(C \cap H_1) + P(C \cap H_2) + P(C \cap H_3) = 0,28 + 0,125 + 0,12 = 0,525$

d) $P_C(H_1) = \dfrac{P(C \cap H_1)}{P(C)} = \dfrac{0,28}{0,525} \simeq 0,533$

2) a) On fait 10 expériences identiques (tirage avec remise) et sur chaque expérience, il y a deux éventualités soit on tire un conifère $p = 0,525$ soit on tire un feuillu $1 - p = 0,475$. Nous sommes donc en présence d'une loi binomiale $\mathscr{B}(10; 0,525)$

b) $P(X = 5) = \dbinom{10}{5} \times 0,525^5 \times 0,475^5 \simeq 0,243$

c) $P(X \leqslant 8) \simeq 0,984$

Exercice 2 **(7 points)**

1) a) On a : $f(1) = 2$ et $f'(1) = 0$ (tangente horizontale)

b) $f'(x) = \dfrac{b\frac{1}{x} \times x - (a + b\ln x)}{x^2} = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$

c) $f(1) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$ et $f'(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b - a = 0$ soit $b = 2$

On a : $f(x) = \dfrac{2 + 2\ln x}{x}$

2) a) On a : $f'(x) = -2\dfrac{\ln x}{x}$. Comme $x > 0$, alors le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $-\ln x$

b) Limites aux bornes de l'ensemble de définition :

- En 0 : on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} 2 + 2\ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+$ par quotient, on a donc :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

- En $+\infty$: limite indéterminée, on change la forme $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x}$.

  De $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par somme on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

c) On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

3) a) Sur $]0\,;1]$, la fonction f est continue car dérivable et monotone (croissante). De plus $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ et $f(1) = 2$ donc $1 \in]\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x); f(1)]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in]0;1]$ tel que $f(\alpha) = 0$

b) De même il existe un unique $\beta \in]1;+\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$

On rentre la fonction dans la calculette et à l'aide d'un tableau de valeur, on trouve $5 < \beta < 6$. Soit $n = 5$

4) a) On trouve la tableau suivant :

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	0,25	0,375	0,4375
b	1	0,5	0,5	0,5	0,5
$b-a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	0,5	0,25	0,375	0,4375	0,46875

b) On obtient les bornes de l'intervalle qui encadre α d'amplitude 0,1.

c) Pour déterminer β, il faut changer les bornes de départ de a et b. On prend $a = 1$ et $b = 6$. De plus comme la fonction sur cet intervalle est décroissante, on doit avoir comme condition de test

Si $f(m) > 1$ affecter à a la valeur m sinon affecter à b la valeur m.

5) a) Il faut déterminer l'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \ln x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{e}$

L'aire de rectangle vaut : $2 \times 1 = 2$, il faut donc que l'aire sous la courbe soit égale à 1 soit :

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

b) Il faut trouver une primitive de f pour confirmer ce résultat. On utilise la forme donnée, on obtient alors :

$$F(x) = 2\ln x + \ln^2 x$$

On obtient alors :

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[2\ln x + \ln^2 x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} = 0 - 2(-1) - (-1)^2 = 1$$

EXERCICE 3 (4 points)

1) **Proposition 1 : Vrai** On pose les point A(i) et B(-1)

$$|z-i| = |z+1| \quad \Leftrightarrow \quad \text{AM} = \text{BM}$$

L'ensemble des point M est donc la médiatrice de [AB]. C'est donc une droite

2) **Propostion 2 : faux** On revient à la forme exponentielle

$$1+i\sqrt{3})^4 = 2^4\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = 16\,e^{i\frac{4\pi}{3}} = 16\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8-8i\sqrt{3}$$

Ce nombre n'est donc pas un réel.

3) **Proposition 3 : vrai** Par les coordonnées dans le repère (A, $\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{AD}}$, $\overrightarrow{\text{AE}}$). On a alors :
E(0 ;0 ;1) et C(1 ;1 ;0) soit $\overrightarrow{\text{EC}} = (1;1;-1)$
B(1 ;0 ;0) et G(1 ;1 ;1) soit $\overrightarrow{\text{BG}} = (0;1;1)$

$\overrightarrow{\text{EC}} \cdot \overrightarrow{\text{BG}} = 0+1-1 = 0$. Les vecteurs directeurs sont perpendiculaires donc les droites sont orthogonales.

4) **Proposition 4 : vrai** De l'équation du plan, on déduit le vecteur normal $\vec{n}(1;1;3)$
- De la représention paramétrique de la droite donnée on déduit le vecteur directeur $\vec{u}(1;1;3) = \overrightarrow{n}$. La droite est donc parpendiculaire au plan.
- Si on prend $t=-1$ dans la représentation paramétrique, on retrouve le point S.

La représentation paramétrique donnée est donc la droite perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$ passant par S.

EXERCICE 4 (5 points)

Obligatoire

1) a) On a les premiers termes suivants :

$$u_1 = \frac{7}{3} \simeq 2,33 \quad , \quad u_2 = \frac{26}{9} \simeq 2,89 \quad , \quad u_1 = \frac{97}{27} \simeq 3,59 \quad , \quad u_4 = \frac{356}{81} \simeq 4,40$$

b) On peut donc faire comme conjecture que la suite est croissante

2) a) Par récurrence : P_n : pour tout entier naturel n $u_n \leqslant n+3$
- Initialisation $n=0$: on a $u_0 = 2$ et $n+3=3$ donc $u_0 \leqslant 3$
- Hérédité : on suppose que $u_n \leqslant n+3$, montrons que $u_{n+1} \leqslant n+4$

$$u \leqslant n+3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}u_n \leqslant \frac{2}{3}(n+3) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}u_n \leqslant \frac{2}{3}n+2+\frac{1}{3}n+1 \leqslant n+3 \leqslant n+4$$

La proposition est donc héréditaire

- Par initialisation et héradité la proposition P_n est vraie

b) On a :

$$u_{n+1}-u_n = \frac{2}{3u_n}+\frac{1}{3}n+1-u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$$

c) Comme $u_n \leqslant n+3$ alors $n+3-u_n > 0$ donc $u_{n+1}-u_n > 0$. La suite est donc croissante.

3) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3}v_n$

Pour tout n : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2}{3}$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 2$.

b) On en déduit que : $v_n = v_0\, q^n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ donc $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

c) On a : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{2}{3} < 1$ et $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$

Par somme, on en déduit que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

4) a) On a :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= v_0 + (v_1+1) + (v_2+2) + \cdots + (v_n+n) \\ &= (v_0 + v_1 + v_2 \cdots + v_n) + 1 + 2 + \cdots + n \\ &= v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 6\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

b) On a alors : $T_n = \frac{S_n}{n^2} = \frac{6}{n^2}\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$

De : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{6}{n^2} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n} = 0$

On en déduit par somme que $\lim_{n\to+\infty} T_n = \frac{1}{2}$

Exercice 4 (5 points)

Spécialité

1) On a : $\begin{cases} v_{n+1} = 0,95v_n + 0,01c_n \\ c_{n+1} = 0,05v_n + 0,99c_n \end{cases}$

2) On calcule :

$$AX = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95a + 0,01b \\ 0,05a + 0,99b \end{pmatrix}$$

On a donc : $c = 0,95a + 0,01b$ et $d = 0,05a + 0,99b$

3) a) $PQ = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 1-1 \\ 5-5 & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

$QP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & -1+1 \\ -5+5 & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

Donc $\frac{1}{6}PQ = \frac{1}{6}QP = I$ (matrice unité)

La matrice inverse de P est donc : $P^{-1} = \frac{1}{6}Q$

b) On a :

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0,95+0,05 & 0,01+0,99 \\ -4,75+0,05 & -0,05+0,99 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4,7 & 0,94 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+5 & -1+1 \\ -4,7+4,7 & 4,7+0,94 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5,64 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,94 \end{pmatrix} \\
&= D
\end{aligned}$$

c) Par récurrence

- Initialisation : On a : $PDP^{-1} = P(P^{-1}AP)P^{-1} = A$ La proposition est initialisé
- Hérédité : On suppose que $A^n = PD^nP^{-1}$, montrons que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$. On a :

$$A^{n+1} = AA^n = (PDP^{-1})(PD^nP^{-1}) = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

  La proposition est donc héréditaire.
- Par initialisation et hérédité la proposition est donc vrai

4) De $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,94^n = 0$ car $-1 < 0,94 < 1$, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{6}(v_0 + c_0) = \frac{250\,000}{6} = \frac{125\,000}{3}$$

Sur un grand nombre d'année la population des villes va se stabiliser vers : $\dfrac{125\,000}{3} \simeq 41\,666$.
Le complément à 250 000 sera dans les campagnes