Bac blanc de mathématiques

Jeudi 18 mai 2011

Exercice 1

ROC

Cf cours.

Exercice 2

Suite

1) a) La fonction cos étant positive sur $[0,1]$ et la fonction identité positive sur $]0,1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 t^n \cos t \,\mathrm{d}t > 0$ et donc $x_n > 0$ pour tout n non nul.

b) Calculons la quantité :

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \int_0^1 t^{n+1} \cos t \,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^n \cos t \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^n (t-1) \cos t \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or pour tout n non nul, sur $]0;1[$, on a $t^n > 0$, $t-1 < 0$ et $\cos t > 0$, donc : $x_{n+1} - x_n < 0$. La suite (x_n) est donc décroissante.

c) La suite (x_n) étant décroissante minorée par 0, elle est donc convergente.

2) a) On a : $0 < \cos t \leqslant 1$ sur $[0,1]$ donc $t^n \cos t \leqslant t^n$ sur $[0;1]$ on en déduit donc :

$$x_n \leqslant \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad x_n \leqslant \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \quad \Leftrightarrow \quad x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

b) On a : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc l'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$$

3) a) On pose :

$$\begin{cases} u(t) = t^{n+1} \\ v'(t) = \cos t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} u'(t) = (n+1)t^n \\ v(t) = \sin t \end{cases}$$

Avec une intégration par partie, on obtient :

$$x_n = \left[t^{n+1} \sin t\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n \sin t \,\mathrm{d}t = \sin(1) - (n+1)y_n$$

b) De la relation précédente, on obtient :

$$y_n = -\frac{x_{n+1}}{n+1} + \frac{\sin(1)}{n+1}$$

or on sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et que la suite (x_n) converge vers 0, d'après les opérations sur les limites de suites, on en déduit que (y_n) converge vers 0.

4) Des relations liants x_n à y_n, on a :

$$(n+1)x_n = y_{n+1} + \cos(1) \quad \text{et} \quad (n+1)y_n = -x_{n+1} + \sin(1)$$

D'après les opérations sur les limites, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} nx_n = \lim_{n\to+\infty} y_n + \cos(1) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} ny_n = -\lim_{n\to+\infty} x_n + \sin(1)$$

Comme les suites (x_n) et (y_n) converge vers 0, on a :

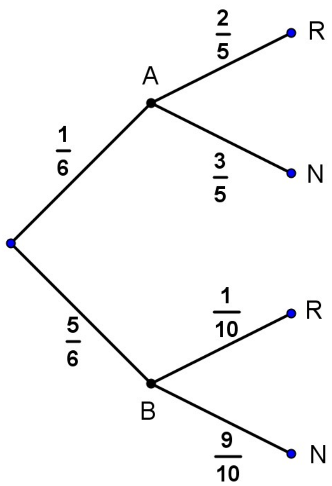
$$\lim_{n\to+\infty} nx_n = \cos(1) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} ny_n = \sin(1)$$

Exercice 3

Probabilité

Partie A

1) On peut schématiser la situation par un arbre :



On a :

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R\cap A) + P(R\cap B) \\ &= \frac{1}{6}\times\frac{2}{5} + \frac{5}{6}\times\frac{1}{10} \\ &= \frac{4+5}{60} \\ &= \frac{9}{60} \\ &= \frac{3}{20} \\ &= 0,15 \end{aligned}$$

2) On calcule :

$$P_R(A) = \frac{P(A\cap R)}{P(R)} = \frac{2}{30} \div \frac{3}{20} = \frac{4}{9}$$

$$P_R(B) = \frac{P(B\cap R)}{P(R)} = \frac{5}{60} \div \frac{3}{20} = \frac{5}{9}$$

La probabilité d'avoir une boule rouge de l'urne B est plus grande que la probabilité d'avoir une boule rouge de l'urne A.

Partie B

1) Loi de probabilité de G. On calcule :

$$P(G = 2x) = P^2(R) = 0,15^2 = 0,0225$$

$$P(G = x - 2) = 2P(R) \times P(N) = 2P(R) \times (1 - P(R)) = 2 \times 0,15 \times 0,85 = 0,255$$

$$P(G = -4) = P^2(N) = (1 - P(R))^2 = 0,85^2 = 0,7225$$

2) On a alors :

$$\begin{aligned} E(G) &= 2x \times 0,0225 + (x-2) \times 0,255 - 4 \times 0,7225 \\ &= 0,045x + 0,255x - 0,51 - 2,89 \\ &= 0,3x - 3,4 \end{aligned}$$

3) Le jeu est favorable au joueur si :

$$0,3x - 3,4 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant \frac{3,4}{0,3} \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant \frac{34}{3}$$

Soit à partir de 12

Exercice 4

Intégrale et équation différentielle

Partie A

1) On a : $f(x) = 20xe^{-\frac{1}{2}x} + 10e^{-\frac{1}{2}x}$

On pose : $X = -x$ donc si $x \to +\infty$ alors $X \to -\infty$, On a alors :

$$\lim_{x\to+\infty} 20xe^{-\frac{1}{2}x} = \lim_{X\to-\infty} -40Xe^{X} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} 10e^{-\frac{1}{2}x} == \lim_{X\to-\infty} 10e^{X} = 0$$

Donc par somme, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2) On dérive :

$$f'(x) = 20e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}(20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x} = (20 - 10x - 5)e^{-\frac{1}{2}x} = (15 - 10x)e^{-\frac{1}{2}x}$$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 10x = 15 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,5$

signe($f'(x)$)=signe($15 - 10x$) car $\forall x \in [0; +\infty[,\ e^{-\frac{1}{2}x} > 0$

On obtient le tableau de variation suivant :

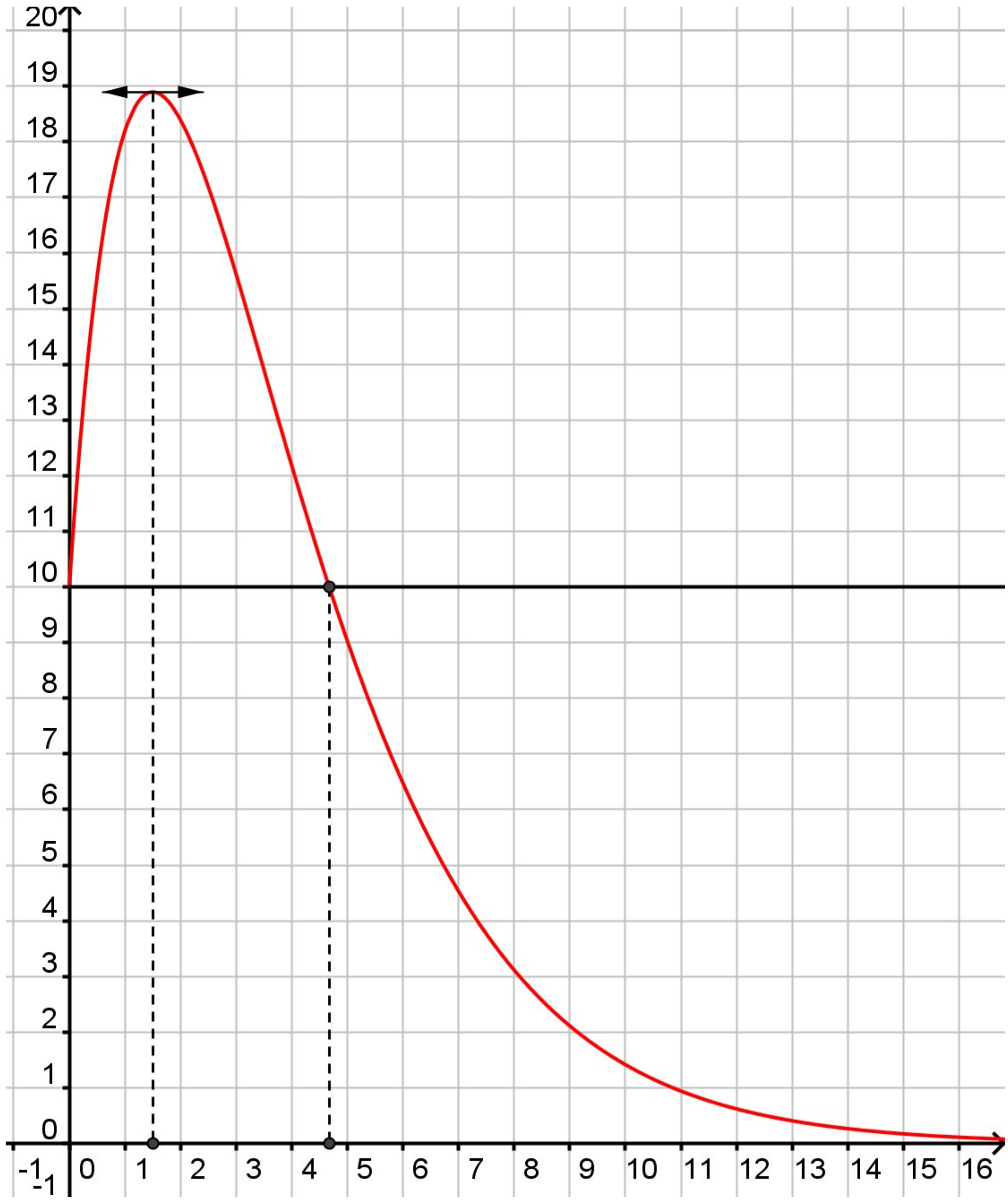
x	0		1,5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	10	$\nearrow$	$40e^{-\frac{3}{4}}$	$\searrow$	0

3) Sur $]0; 1,5]$, la fonction f est croissante et $f(0) = 10$, donc $f(x) > 10$ donc l'équation $f(x) = 10$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

Sur $]1,5; +\infty[$, $f'(x) > 0$, donc la fonction est continue et monotone sur cet intervalle. On sait que $f(1,5) > 10$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc d'après le théorème de la bijection, il existe un unique $\alpha \in]1,5; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 10$.

Conclusion : $f(x) = 10$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$ et $\alpha \simeq 4,673$

4) On obtient la courbe suivante :



5) On pose :

$$\begin{cases} u(x) = 20x + 10 \\ v'(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = 20 \\ v(t) = -2e^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}$$

En intégrant par partie, on trouve :

$$I = \left[-2(20x+10)\,e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3 + \int_0^3 40\,e^{-\frac{1}{2}x}\,\mathrm{d}x$$

$$I = \left[-2(20x+10)\,e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3 + \left[-80\,e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3$$

$$I = -140\,e^{-\frac{3}{2}} + 20 - 80\,e^{-\frac{3}{2}} + 80$$

$$I = -220\,e^{-\frac{3}{2}} + 100$$

Partie B

1) On sait que $f(0) = 10$ et :

$$\begin{aligned} f'(t) + \frac{1}{2}f(t) &= (15-10t)\,e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}(20t+10)\,e^{-\frac{1}{2}t} \\ &= (15-10t+10t+5)\,e^{-\frac{1}{2}t} \\ &= 20\,e^{-\frac{1}{2}t} \end{aligned}$$

La fonction f vérifie donc l'équation (E).

2) a) Calculons la quantité :

$$\begin{aligned} (g-f)'(t) + \frac{1}{2}(g-f)(t) &= g'(t) - f'(t) + \frac{1}{2}g(t) - \frac{1}{2}f'(t) \\ &= g'(t) + \frac{1}{2}g(t) - \left(f'(t) + \frac{1}{2}f(t)\right) \end{aligned}$$

Comme g et f vérifie l'équation (E), on a :

$$\begin{aligned} &= 20\,e^{-\frac{1}{2}t} - 20\,e^{-\frac{1}{2}t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La fonction $g - f$ vérifie donc l'équation (E').

b) L'équation (E') : $y' = -\frac{1}{2}y$ admet comme solution :

$$y(t) = k\,e^{-\frac{1}{2}t} \quad k \in \mathbb{R}$$

c) Comme $g - f$ est solution de (E'), et comme $(g-f)(0) = 0$, on en déduit que $k = 0$ et donc que $g = f$.

3) La température de cette réaction chimique redescend à sa valeur initiale au bout de α heures soit 4 h 40'.

4) On a :

$$\theta = \frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{220}{3}e^{-\frac{3}{2}} + \frac{100}{3} \simeq 16,97^\circ\mathrm{C}$$

Exercice 5

Complexe pour les non spécialistes

1) On a :

$$z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1$$
$$z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\pi} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

2) a) On a $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 1$, donc A, B et C sont sur le cercle de centre O et de rayon 1 soit $\mathscr{C}$.

b) On a donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \frac{2\pi}{3}$, donc le triangle ABC est équilatéral.

3) a) cf figure

b) Comme l'homothétie converse les angles géométriques, le triangle PQR est équilatéral.

4) a) L'écriture complexe de h est :

$$z' = -2z$$

b) On calcule :

$$z_A + z_B + z_C = e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 - e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\cos\frac{\pi}{3} - 1 = 0$$

On a donc : $z_A = -(z_B + z_C)$

Soit $I = m[BC]$, on a alors : $z_I = \frac{1}{2}(z_B + z_C)$

Le milieu I' de $[QR]$ est l'image par h de I soit :

$$z_{I'} = -2z_I = -(z_B + z_C) = z_A$$

A est donc le milieu de $[QR]$.

c) Comme A est le milieu de $[QR]$ et comme PQR est équilatéral de centre O alors (OA) est la hauteur issue de P de PQR, donc $(OA) \perp (QR)$.
Comme A est sur le cercle $\mathscr{C}$, la droite (QR) est la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$.