Limites et continuité

Table des matières

1 Limites - Rappels de première

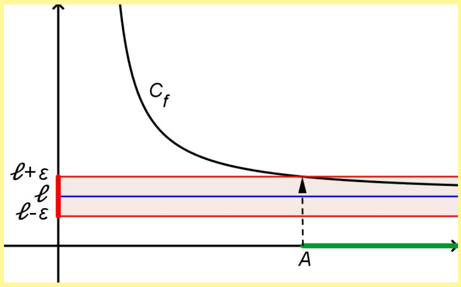
1.1 Définition

La définition rigoureuse des différentes limites n'est pas au programme, cependant il est important de définir en langage ordinaire la signification de celles-ci.

Définition 1 : Voici les définitions que l'on peut se donner en terminale.

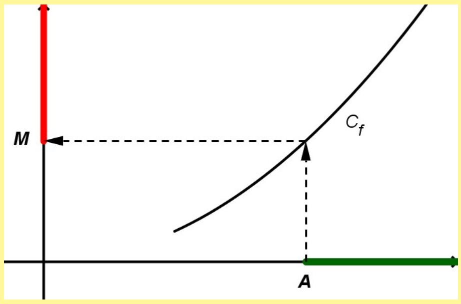
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$:

tout intervalle ouvert de centre ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ prises pour tous les x d'un intervalle $]A; +\infty[$.
(en $-\infty$ intervalle $]-\infty; A[$)



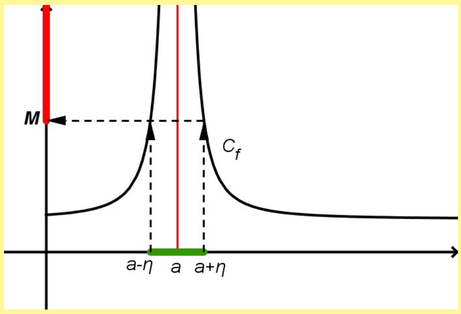
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$:

tout intervalle ouvert $]M, +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ prises pour tous les x d'un intervalle $]A; +\infty[$.
(transposer en $-\infty$)



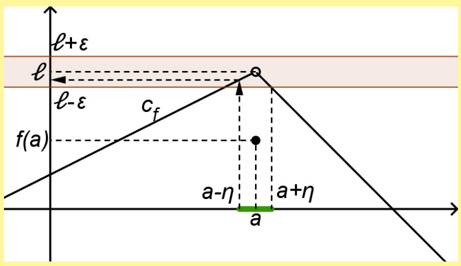
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$:

tout intervalle $]M, +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ prises pour tous les x d'un intervalle ouvert centré en a.
($]a - \eta; a + \eta[$ et $x \neq a$)



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$:

tout intervalle ouvert de centre ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ prises pour tous les x d'un intervalle ouvert centré en a.



On peut aussi définir la limite à gauche ou à droite de $x = a$ lorsque la limite en $x = a$ n'existe pas. On notera alors :

$$\text{limite à gauche : } \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \qquad \text{limite à droite : } \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

1.2 Asymptotes parallèles aux axes

Résultat sur f	Interprétation géométrique sur la courbe $\mathscr{C}_f$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$	La droite $y = l$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$	La droite $x = a$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$

1.3 Limites des fonctions élémentaires

Les fonctions élémentaires vues en première sont :

- x^n, $\dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
- $\sqrt{x}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Limites en l'infini

$f(x)$	x^n	$\dfrac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	0	non défini	non défini

Limites en 0

$f(x)$	$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	non défini

1.4 Opérations sur les limites

1.4.1 Somme de fonctions

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. Ind.

1.4.2 Produit de fonctions

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
Si g a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $f \times g$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	∞^*	F. ind.	∞^*

*Appliquer la règle des signes

1.4.3 Quotient de fonctions

Si f a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	ℓ	∞	∞
Si g a pour limite	$\ell' \neq 0$	0	0	∞	ℓ'	∞
alors $\dfrac{f}{g}$ a pour limite	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞*	F. ind.	0	∞*	F. ind.

*Appliquer la règle des signes

1.4.4 Conclusion

Il existe donc quatre formes indéterminées où les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure. Dans certains cas, les limites sur les polynômes et les fonctions rationnelles permettent de lever l'indétermination. Lorsque ce n'est pas le cas, il faudra chercher à simplifier, à multiplier par la quantité conjuguée (pour les fonctions irrationnelles), à utiliser un théorème de comparaison, à effectuer un changement de variable …

1.5 Théorème sur les fonctions polynomes et les fonctions rationnelles

1.5.1 Fonction polynôme

Théorème 1 : Un polynôme a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que son monôme du plus haut degré.

$$\text{Si} \quad P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 x_0 \quad \text{alors}$$

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$$

Exemples : Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des polynômes suivants :

$$P(x) = 5x^3 - 3x + 1 \quad \text{et} \quad Q(x) = -2x^4 + x + 3$$

On applique le théorème sur les limites des polynômes :

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} 5x^3 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} 5x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} Q(x) = \lim_{x \to +\infty} -2x^4 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} Q(x) = \lim_{x \to -\infty} -2x^4 = -\infty$$

Les limites des polynômes ne posent donc aucun problème avec ce théorème que vous pouvez démontrer facilement.(pensez à la limite du produit !)

1.5.2 Fonction rationnelle

Théorème 2 : Une fonction rationnelle a même limite en $+\infty$ et $-\infty$ que son monôme du plus degré de son numérateur sur celui de son dénominateur.

$$\text{Si} \quad f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 x_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 x_0} \quad \text{alors}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Exemples : Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions rationnelles suivantes :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-2} \quad ; \quad g(x) = \frac{x^3}{1-x^2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1-x}{x^2+2x-3}$$

On applique le théorème sur les limites des fonction rationnelles :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 = 2 \quad \text{et}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to-\infty} 2 = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty \quad \text{et}$$
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0 \quad \text{et}$$
$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions rationnelles ne posent donc pas de problème grâce à ce théorème (que vous pouvez aussi démontrer facilement).

Pour déterminer les limites des fonctions rationnelles aux valeurs interdites, on utilise la limite du quotient.

Exemples : Déterminer la limite en a des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x+1} \quad \text{en} \quad a = -1$$
$$g(x) = \frac{x+2}{(x+3)^2} \quad \text{en} \quad a = -3$$
$$h(x) = \frac{2x^2}{(x-1)(2-x)} \quad \text{en} \quad a = 2$$

Comme on cherche les limites aux valeurs interdites le dénominateurs des trois fonctions tend vers 0 donc il faut déterminer le signe du dénominateur suivant que l'on tend à droite ou à gauche de la valeur interdite. Le mieux consiste à faire un tableau de signes lorsque cela n'est pas immédiat (pour le second degré particulièrement comme c'est le cas de la fonction $h(x)$). On a alors :

Pour la fonction f

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1} x^2+3=4 \\ \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} x+1=0^- \\ \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} x+1=0^+ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par quotient, on a} \\ \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=+\infty \end{array}$$

Pour la fonction g

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -3} x+2=-1 \\ \lim\limits_{x\to -3} (x+3)^2=0^+ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par quotient, on a} \\ \lim\limits_{x\to -3} g(x)=-\infty \end{array}$$

Pour la fonction h, il est préférable de dresser un tableau de signe du dénominateur $(x-1)(2-x)$ qui s'annule en $x=1$ ou $x=2$. On a donc :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$(x-1)(2-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2} 2x^2=8 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (x-1)(2-x)=0^+ \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x-1)(2-x)=0^- \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{par quotient, on a} \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} h(x)=+\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} h(x)=-\infty \end{array}$$

On a ainsi une asymptote verticale pour la valeur interdite avec une fonction rationnelle.

1.6 Asymptote oblique

Définition 2 : Dire que la droite Δ d'équation $y=ax+b$, $(a\neq 0)$, est asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f en $\pm\infty$ signifie que :

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$$

Exemple : Montrer que la droite Δ d'équation $y=3x-5$ est asymptote en $+\infty$ et $-\infty$ à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f. On déterminera les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

$$f(x)=3x-5+\frac{2}{x+2}$$

On calcule d'abord la quantité :

$$f(x) - (3x - 5) = \frac{2}{x+2}$$

On calcule la limite en $+\infty$ et $-\infty$ de cette quantité, en déterminant son signe pour connaître la position relative :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0^+$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x+2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0^-$$

On en déduit que la droite Δ est asymptote en $+\infty$ et $-\infty$ à la courbe $\mathscr{C}_f$. Du signe de cette quantité, on en déduit que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Δ en $+\infty$ et en dessous en $-\infty$

2 Théorèmes de comparaison et composition de fonctions

2.1 Théorème des Gendarmes ou d'encadrement

Théorème 3 : Limites et ordre

1) **Théorème des « Gendarmes »**
f, g, et h sont trois fonctions définies sur l'intervalle $I =]b; +\infty[$ et ℓ un réel.

Si pour tout $x \in I$, on a : $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et si g et h ont même limite ℓ en $+\infty$ alors :
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

(Énoncé analogue en $-\infty$ ou en un réel a)

2) **Cas d'une limite infinie.**
f et g sont deux fonctions définies sur $I =]b; +\infty[$.
Si pour tout $x \in I$ on a : $f(x) \geqslant g(x)$ et si :
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

(Énoncé analogue en $-\infty$ ou en un réel a)

Démonstration : Dans le cas $+\infty$ (c'est le cas qui figure au programme, la démonstration des autres cas ne pourra vous être demandée.)

On considère un intervalle ouvert J centré en ℓ. La fonction g a pour limite ℓ en $+\infty$ donc il existe un réel A_1 tel que pour tout $x \in]A_1; +\infty[$ (inclus dans I) toutes les valeurs $g(x)$ sont dans J.

De même, pour la fonction h : il existe un réel A_2 tel que tout $x \in]A_2; +\infty[$ toutes les valeurs $h(x)$ sont dans J.

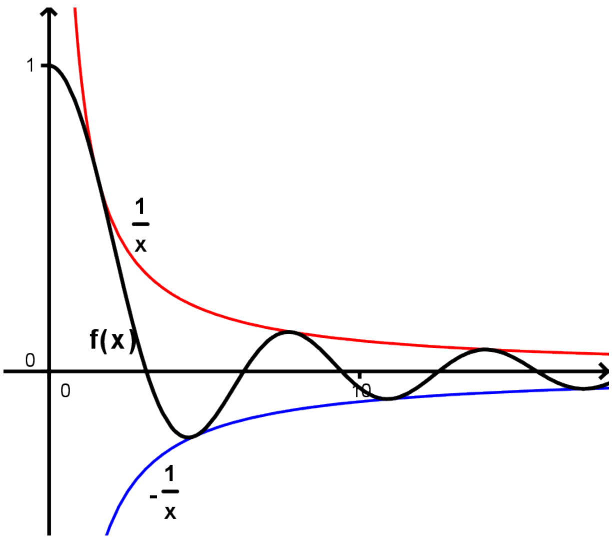
On désigne par A le plus grand des nombres A_1 et A_2. Alors pour tout $x \in]A; +\infty[$ on a : $g(x) \in J$ et $h(x) \in J$.

Or, on sait que $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ donc, nécessairement $f(x) \in J$.

Conclusion : f a pour limite ℓ quand $x \to +\infty$

Exemples : Déterminer la limite de $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ en $+\infty$

On peut avoir un aperçu de la représentation de f.



pour tout x positif, on a $\quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, donc :

$$\forall x > 0 \quad -\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

or on sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} = 0 \quad$ et $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

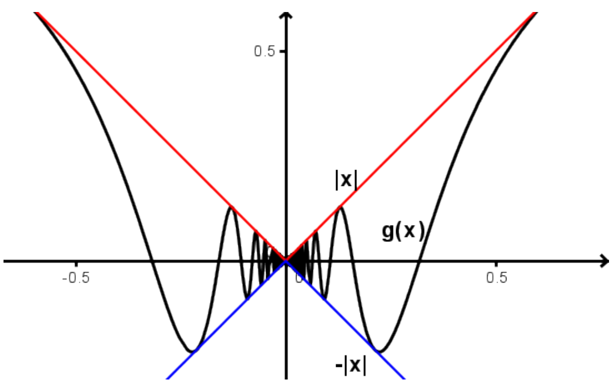
D'après le théorème des Gendarmes, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏ ✏

Déterminer la limite de $g(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ en 0

On peut avoir un aperçu de la représentation de g.



Attention au voisinage de 0, il vaut mieux margorer la fonction en valeur absolue pour éviter les problèmes de signes.

On a donc : $\forall x \neq 0 \quad |\sin \frac{1}{x}| \leqslant 1$ donc :

$$\forall x \neq 0 \quad |x \sin \frac{1}{x}| \leqslant |x| \quad \text{donc} \quad -|x| \leqslant x \sin \frac{1}{x} \leqslant |x|$$

or on sait que : $\lim\limits_{x \to 0} -|x| = 0 \quad$ et $\quad \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$

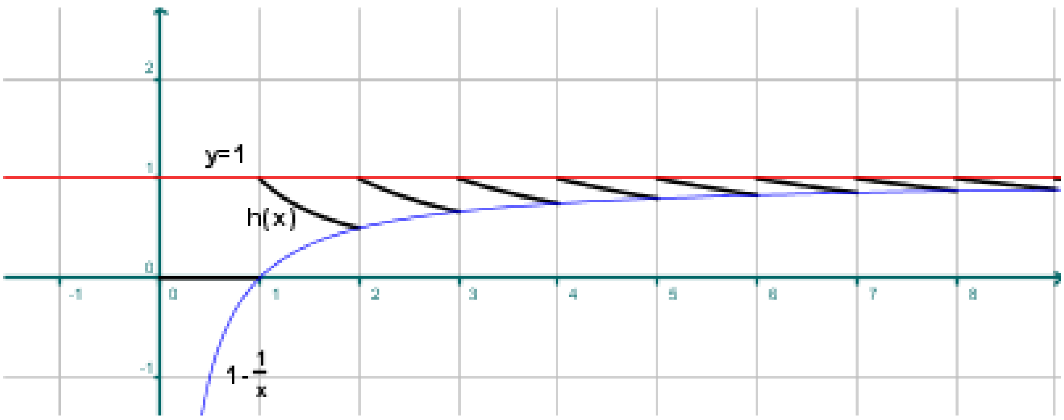
D'après le théorème des Gendarmes, on a :

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏

Étude de la limite de $h(x) = \dfrac{E(x)}{x}$ en $+\infty$

On peut avoir un aperçu de la représentation de h



La partie entière est définie sur $\mathbb{R}_+$ de la façon suivante :

$$\text{si} \quad n \leqslant x < n+1 \quad E(x) = n \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}$$

on peut alors en conclure l'encadrement : $x - 1 \leqslant E(x) \leqslant x$. On en déduit alors l'endrement de la fonction f

$$\frac{x-1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 1$$

or on sait que :

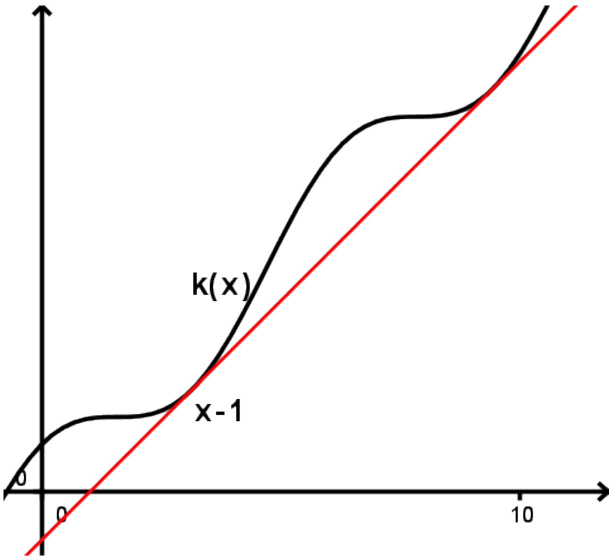
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$$

Donc d'après le théorème des Gendarmes, on en déduit :

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 1$$

✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏

Étude de la limite de $k(x) = x + \cos x$ en $+\infty$
On peut avoir un aperçu de la représentation de g.



On a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x \geqslant -1$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x + \cos x \geqslant x - 1$$

or on sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$, donc d'après les comparaisons de limites, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} k(x) = +\infty$$

2.2 Limite d'une fonction composée

Théorème 4 : **Admis**. Soit trois fonctions f, g et h telles que f et g sont définies respectivement sur I et $J \subset f(I)$ et $h = g \circ f$.

a, b et c sont des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

$$\text{Si} \quad \lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x \to b} g(x) = c \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to a} h(x) = c$$

Exemples : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \quad$ avec $\quad f(x) = \sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) \quad$ avec $\quad g(x) = \cos\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)$

1) La décomposition de la fonction f ne pose pas de problème. On peut poser $u(x) = 2 + \dfrac{1}{x^2}$ et $v(x) = \sqrt{x}$. On a alors : $f = v \circ u$. On calcule alors les limites :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \dfrac{1}{x^2} = 2 \\ \lim\limits_{x \to 2} v(x) = \lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par composition, on a :} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{2} \end{array}$$

On peut éventuellement rédiger en faisant un changement de variable. On pose :

$$X = 2 + \frac{1}{x^2} \quad \text{donc} \quad f(x) = \sqrt{X}$$

On a alors :

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} X = \lim_{x\to+\infty} 2 + \frac{1}{x^2} = 2 \\ \displaystyle\lim_{X\to 2} \sqrt{X} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par composition, on a :} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{2} \end{array}$$

2) On décompose de la même façon la fonction g. On pose $u(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ et $v(x) = \cos x$. On a alors $f = v \circ u$.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0} \cos x = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par composition, on a :} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \end{array}$$

3 Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

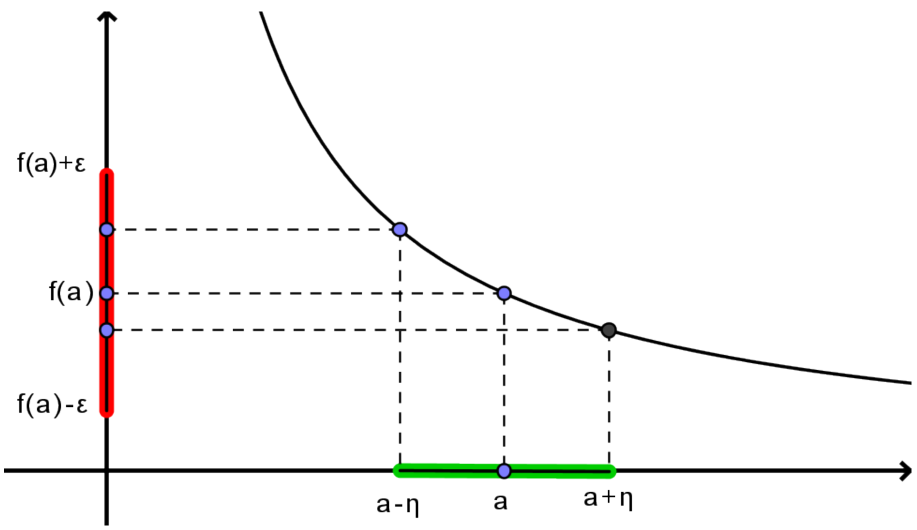
3.1 Définition

Définition 3 : Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I. Soit a un élément de I.
On dit que la fonction f est continue en a si et seulement si :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Conséquence Tout intervalle centré en $f(a)$ contient toutes le valeur de $f(x)$ pour x suffisament proche de a.

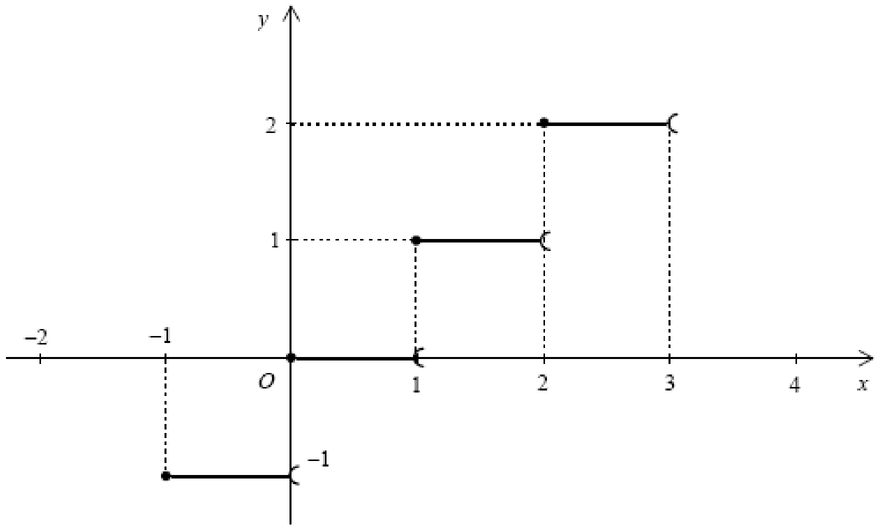
Un schéma permet de donner la définition rigoureuse de la continuité en a.



$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Pour tout l'intervalle rouge, on peut trouver un intervalle vert pour que toute les images de l'intervalle vert soit dans l'intervalle rouge.

Remarque : Il existe bien évidement des fonctions qui ne sont pas continue en un point. Par exemple la fonction partie entière $E(x)$ qui n'est pas continue lorsque x est entier. Voici la représentation :



Définition 4 : Soit une fonction définie sur un intervalle I. On dit que la fonction f est continue sur I si et seulement si la fonction f est continue en tous points de I

Remarque : d'une façon intuitive, on peut dire qu'une fonction est continue si « on peut tracer la courde de f sans lever son crayon ». Ce n'est évidement pas rigoureux !

3.2 Continuité et dérivabilité

Théorème 5 : Si f est dérivable en a alors la fonction f est continue en a. La réciproque est fausse

Démonstration : On sait que la fonction f est dérivable en a, donc en revenant à la définition, on a :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

On pose $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ avec $x \neq a$, on a alors ;

$$f(x) - f(a) = (x-a)g(x)$$
$$f(x) = f(a) + (x-a)g(x)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a}(x-a) = 0 \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = f'(a)\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{par produit, on a} \\ \lim\limits_{x\to a}(x-a)g(x) = 0\end{array}$$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. La fonction f est bien continue en a.

Pour montrer que la réciproque est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple. Soit la fonction $|x-1|$ qui peut se définir par :

$$f \begin{cases} f(x) = x-1 & x > 1 \\ f(1) = 0 \\ f(x) = 1-x & x < 1 \end{cases}$$

on a alors :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x-1 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 1-x = 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0 \\ \text{donc} \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0\end{array}$$

La fonction est donc continue en 1. Par contre :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{x-1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-x}{x-1} = -1\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Les limites ne sont pas égales} \\ \text{la fonction n'est pas dérivable en 1}\end{array}$$

3.3 Fonctions continues

Théorème 6 : Toutes les fonctions construites algébriquement par somme, produit, quotient, composition de fonctions élémentaires sont continues sur leur ensemble de définition

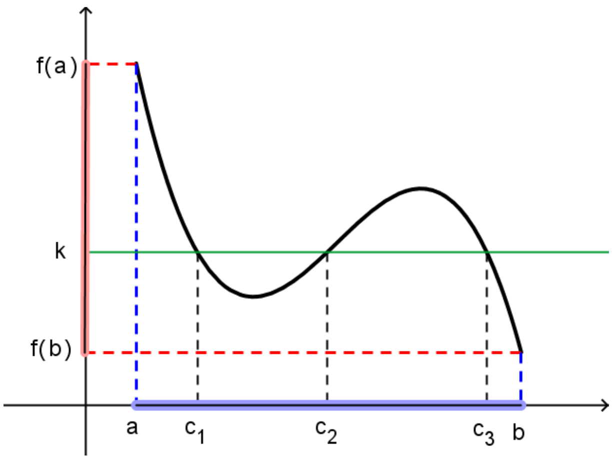
Remarque : Ce théorème est la conséquence du théorème sur la dérivabilité des fonctions élémentaires et des règles opératoires sur les fonctions dérivées.

3.4 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 7 : Soit une fonction définie et **continue** sur un intervalle $I = [a, b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in I$ tel que $f(c) = k$.

Remarque : Ce théorème est admis. Sa démonstration repose sur la **construction de deux suites** où chaque terme est construit en divisant par deux par le milieu l'intervalle précédent, et par le théorème des **suites adjacentes** qui sera vue plus tard.

Exemple : Voici une illustration graphique. Le fait que c existe ne veut pas dire qu'il est unique. Ici, il existe trois valeurs pour c.



Théorème 8 : Soit une fonction f continue et strictement monotone sur $I = [a, b]$. Alors, pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $I = [a, b]$

Remarque : Si l'intervalle $I =]a, b[$ est ouvert, k doit alors être compris entre $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to b} f(x)$

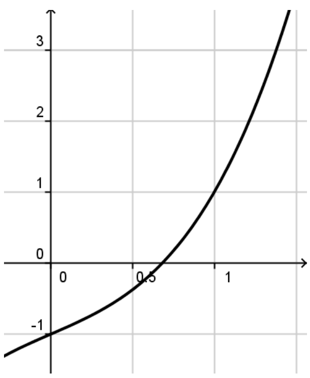
Démonstration : l'existence découle du théorème précédent, et l'unicité de la monotonie de la fonction.

Remarque :

- Lorsque $k = 0$, on pourra montrer que $f(a) \times f(b) < 0$.
- ce théorème est parfois appelé le théorème de la bijection car la fonction réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x - 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'admet qu'une solution sur $\mathbb{R}$. On donnera un encadrement à l'unité de cette solution.

✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏✏



La fonction f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ car f est un polynôme.
La fonction f est la somme de deux fonction croissantes x^3 et $x - 1$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. L'équation ne peut admettre qu'une solution.
De plus, on a $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$, donc $f(0) \times f(1) < 0$ donc d'après le théorème de la bijection, la fonction f admet un unique $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Avec une calculatrice, on peut obtenir un encadrement plus fin, par exemple un encadrement au millième :

$$0,682 < \alpha < 0,683 \quad \text{car} \quad f(0,682) \approx -0.0079 \quad \text{et} \quad f(0,683) \approx 0,0016$$

Algorithme : Un algorithme utilisant le principe de **dichotomie** pour trouver une approximation de α

On pose :

- a et b les bornes de l'intervalle.
- k la valeur à atteindre.
- p la précision en puissance de 10.
- e l'erreur commise.
- n le nombre d'itérations.

Variables
a, b, k, p, m, n, e
Algorithme
Lire a, b, k, p
$0 \to n$
Tant que $|b-a| > 10^p$
$\dfrac{a+b}{2} \to c$
   Si $(f(a)-k)\,(f(m)-k) > 0$
   $m \to a$
   Sinon
   $m \to b$
   FinSi
$n+1 \to n$
FinTanque
$|b-a| \to e$
Afficher : min(a, b), max(a, b), n, e

TEXAS INSTRUMENTS TI-82 Stats.fr

: Prompt A, B, K, P
: $0 \to N$
: While abs$(b-a) > 10^P$
: $(A+B)/2 \to M$
: If $(Y_1(A)-K)\,(Y_1(M)-K) > 0$
: Then
: $M \to A$
: Else
: $M \to B$
: End
: $N+1 \to N$
: End
: abs$(B-A) \to E$
: Disp min(A, B), max(A, B), N, E