Contrôle de mathématiques

Lundi 25 février 2013

EXERCICE 1

ROC **(6 points)**

1) Pré-requis **: Théorème fondamental de l'intégration**

   Soit une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. La fonction F définie par : $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f.

   Démontrer que toute fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ admet des primitives sur $[a;b]$

2) **Application**. On admet la généralisation de ce théorème sur un intervalle ouvert. Déterminer une primitive des fonctions f suivantes sur l'intervalle I indiqué. On indiquera clairement la forme utilisée pour trouver cette primitive.

   a) $f(x) = \dfrac{4}{(3x-1)^2}$, $\quad I = \left]\dfrac{1}{3};+\infty\right[$

   b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $\quad I =]0;+\infty[$

   c) $f(x) = e^{1-2x}$, $\quad I = \mathbb{R}$

   d) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-1}$, $\quad I =]1;+\infty[$

   e) $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$, $\quad I = \mathbb{R}$

EXERCICE 2

Intégrale **(3 points)**

Soit la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par $\quad f(x) = \dfrac{1}{x(x^2-1)}$

1) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$:

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$

2) Déterminer alors une primitive F de f sur $]1;+\infty[$

3) En déduire alors la valeur de : $\quad I = \displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$

   On donnera le résultat exact sous la forme $p\ln 2 + q\ln(3)$

EXERCICE 3

Intégrale et suite **(6 points)**

Soit n un entier naturel. On considère l'intégrale :

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x}\,dx \quad \text{et pour } n \geqslant 1 \quad I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$$

1) Calculer I_0
2) Donner une interprétation graphique du nombre I_0. On fera un graphique pour faire apparaître I_0
3) On admet que : $\quad I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$. Calculer I_1 et I_2

4) On donne le programme suivant :

Variables
N, X
Initialisation
$0 \to N$
$e - 1 \to X$
Traitement
Tant que $N < 10$ faire
  $(N+1)X - 1 \to X$
  $N + 1 \to N$
FinTantque
Afficher X

Que calcule ce programme ? Donner la valeur approchée à 10^{-3} de la valeur de sortie de ce programme. Quelle conjecture peut-on faire ?

5) a) Démontrer que pour tout réel x de $[0; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité :

$$x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant x^n\, e$$

b) En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $\ast\infty$

Exercice 4

Volume **(3 points)**

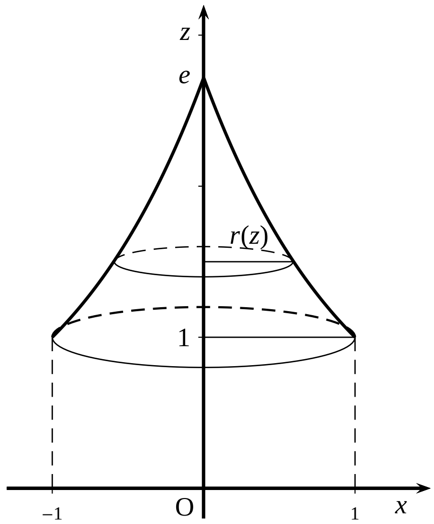
On définit le volume d'un "petit chapeau" ci-contre obtenu par révolution autour de l'axe (Oz) de la courbe d'équation :

$$z = e^{1-x}$$

$(0 \leqslant x \leqslant 1)$ dans le plan (xOz) ;

On rappelle que le volume d'un solide de révolution d'axe z entre z_1 et z_2 est égal à

$$\int_{z_1}^{z_2} \pi\, r^2(z)\, \mathrm{d}z$$



1) Montrer que le volume de ce "petit chapeau" est égal à : $V = \pi \displaystyle\int_1^e (1 - \ln z)^2\, \mathrm{d}z$

2) Soit la fonction F définie sur $[1; e]$ par : $F(x) = 5x - 4x\ln x + x\ln^2 x$
Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f définie sur $[1; e]$ par :
$f(x) = (1 - \ln x)^2$

3) Déterminer la valeur exacte de V puis en donner une valeur approchée à 10^{-3}

Exercice 5

Cinématique **(2 points)**

Un mobile se déplace à la vitesse $v(t) = t^2 + 5t$ (t en s et v en m.s^{-1}) sur une trajectoire rectiligne

1) Quelle est la vitesse moyenne entre les instants 0 s et 30 s ?

2) Quelle sera la distance parcourue ?