Correction contrôle de mathématiques

Du jeudi 21 novembre 2013

Exercice 1

Continuité **(2 points)**

a) Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I. Soit a un élément de I. On dit que la fonction f est continue en a si, et seulement si, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

b) Vérifions-le avec la fonction proposée. La limite est une forme indéterminée "$\dfrac{0}{0}$", on multiplie par la quantité conjuguée.

$$f(x) = \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$\lim\limits_{x \to 0} 1 - x = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x} = 1$ par composition $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{1+x} = 1$

Par somme et quotient $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$. La fonction f est donc continue en 0.

Exercice 2

Étude d'une fonction **(2 points)**

a) La fonction f est une fonction rationnelle donc f est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} - \{2\}$.

$$f'(x) = 1 - \frac{9}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - 9}{(x-2)^2} = \frac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2}$$

b)
- $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -1$
- Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-5)(x+1)$ car $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$, $(x-2)^2 > 0$.
  On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	1	↘	||	↘	13	↗	

Exercice 3

Calcul de limites **(4 points)**

a) On a : $4 - x^2 = (2-x)(2+x)$ d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a alors : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2} 3x-1=5\\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} 4-x^2=0^-\end{array}\right\}$ Par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{3x-1}{4-x^2}=-\infty$

b) $\forall x>0$ on a : $-1\leqslant \sin x\leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad -\dfrac{1}{x}\leqslant \dfrac{\sin x}{x}\leqslant \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ d'après le théorème des gendarmes on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{\sin x}{x}=0$

La deuxième limite est indéterminée. On change la forme : $x^2+x\sin x=x^2\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)$

D'après la limite précédente, on a :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{\sin x}{x}=1\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{Par produit}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x\sin x=+\infty\end{array}$$

c) Limite composée et indéterminée

$$\frac{2x+1}{x+1}=\frac{x\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{2+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}\qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 2+\dfrac{1}{x}=2\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{1}{x}=1\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{Par quotient}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}=2\end{array}$$

or $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x}=\sqrt{2}$ par composition $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{2x+1}{x+1}}=\sqrt{2}$

Exercice 4

Vrai - faux **(2 points)**

a) **Faux** La fonction f peut être négative. Pour que cela soit vrai, il aurait fallu avoir un encadrement

Soit par exemple $f(x)=-x$, on a bien : $\forall x>0 \quad -x\leqslant \dfrac{2}{x}$

et pourtant $\lim\limits_{x\to+\infty} -x=-\infty$

b) **Vrai** Pour qu'une fonction du type $\sqrt{u}$ soit dérivable, il faut que $u>0$

Or on a le tableau de signe suivant : $x^2-4=(x-2)(x+2)$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc $\forall x\in]-\infty,-2[$, $x^2-4>0$ donc la fonction f est bien dérivable sur $]-\infty,-2[$

EXERCICE 5

Fonction rationnelle et fonctions auxiliaire **(10 points)**

1) **Étude d'une fonction auxiliaire**

a) La fonction g est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$: $g'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2+1)$

or $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$ donc $g'(x) > 0$

La fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$g'(x)$		+		
$g(x)$	$\nearrow$	-6 $\nearrow$	8 $\nearrow$	

b) D'après le tableau de variation :

- Si $x < -2$ alors $g(x) < 0$. L'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Si $x > 0$ alors $g(x) > 0$. L'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Si $-2 \leqslant x \leqslant 0$ la fonction g est continue (car dérivable), monotone (croissante) et $g(-2)g(0) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiares, il existe une unique solution $\alpha \in [-2, 0]$ tel que $g(x) = 0$

L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution dans $\mathbb{R}$.

c) À l'aide d'un algorithme par la méthode de dichotomie, on trouve :

$$-1{,}513 \leqslant \alpha \leqslant -1{,}512 \qquad \text{11 itérations}$$

d) Comme la fonction g est croissante, on a :

- Si $x < \alpha$, $g(x) < 0$
- Si $x > \alpha$, $g(x) > 0$

2) **Étude de la fontion f**

a) Limites indéterminées, on change la forme de $f(x)$

$$f(x) = \frac{x^3\left(1 - \dfrac{4}{x^3}\right)}{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)} = \frac{x\left(1 - \dfrac{4}{x^3}\right)}{1 + \dfrac{1}{x^2}} \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{4}{x^3} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x^2} = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par produit} \\ \text{et quotient} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{array}$$

De la même manière, on trouve $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

b) La fonction f est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3-4)}{(x^2+1)^2} = \frac{x(3x^2+3x-2x^3+8)}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x^3+3x+8)}{(x^2+1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}$$

c) • $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad$ ou $\quad x = \alpha$

• Le signe de $f'(x)$ est celui de $xg(x)$ car $\forall x \in \mathbb{R}, \ (x^2+1)^2 > 0$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient alors le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

d) On sait que $g(\alpha) = 0$ donc $\alpha^3 + 3\alpha + 8 = 0$ soit $\alpha^3 = -3\alpha - 8$

En remplaçant dans $f(\alpha)$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha(\alpha^3 - 4)}{\alpha^3 + \alpha} = \frac{\alpha(-3\alpha - 8 - 4)}{-3\alpha - 8 + \alpha} = \frac{\alpha(-3\alpha - 12)}{-2\alpha - 8} = \frac{-3\alpha(\alpha + 4)}{-2(\alpha + 4)} = \frac{3}{2}\alpha$$

e) De $-1{,}513 \leqslant \alpha \leqslant -1{,}512$ on en déduit que $-2{,}270 \leqslant f(\alpha) = \dfrac{3}{2}\alpha \leqslant -2{,}268$

f) Si $\mathscr{C}_f$ admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$, on a :

$$f'(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x(x^3 + 3x + 8)}{(x^2 + 1)^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 + 3x^2 + 8x = x^4 + 2x^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 8x + 1 = 0$$

On calcule $\Delta = 64 + 4 = 68$ on obtient les solutions suivantes en remarquant que $\sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

$$x_1 = \frac{-8 + 2\sqrt{17}}{2} = -4 + \sqrt{17} \qquad \text{ou} \qquad x_2 = \frac{-8 - 2\sqrt{17}}{2} = -4 - \sqrt{17}$$

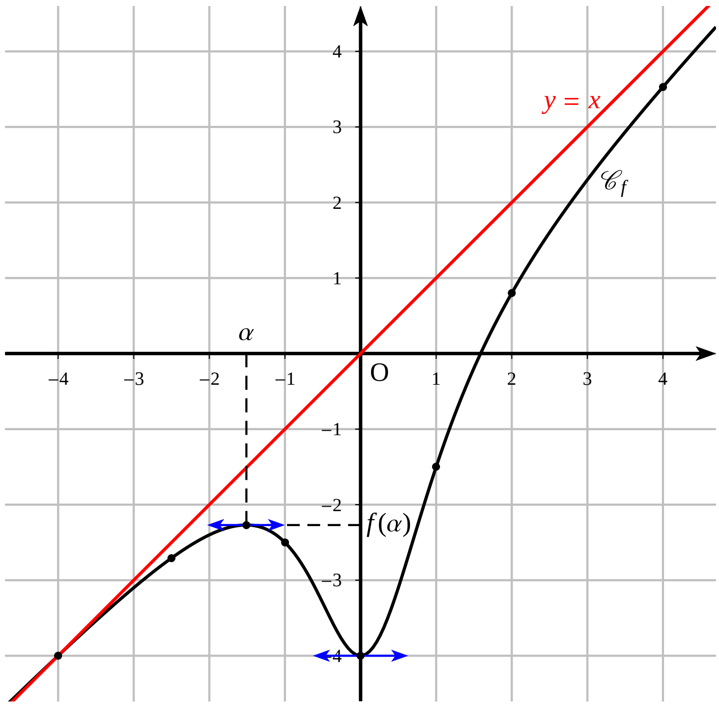
Il existe donc deux points de $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses x_1 et x_2 où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$

3) **Représentation de la fonction *f***

a) On obtient

x	-4	$-2,5$	-1	0	1	2	4
$f(x)$	-4	$-2,707$	$-2,5$	-4	$-1,5$	$0,8$	$3,529$

b) On obtient la courbe ci-dessous :



4
3
2
1
$y = x$
$\mathscr{C}_f$
α
O
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
−1
−2
$f(\alpha)$
−3
−4