Correction contrôle de mathématiques
Du jeudi 30 janvier 2014

EXERCICE 1

ROC — **1 point**

On a : $|z\,z'|^2 = z\,z' \times \overline{z\,z'} = z\,z' \times \bar{z}\,\bar{z'} = z\,\bar{z} \times z'\,\bar{z'} = |z|^2 \times |z'|^2$

On en déduit donc que : $|z\,z'| = |z| \times |z'|$

EXERCICE 2

Equation du troisième degré — **4 points**

1) a) Soit la fonction f telle que : $f(x) = x^3 - 18x + 35 = x^3\left(1 - \dfrac{18}{x^2} + \dfrac{35}{x^3}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\pm+\infty} 1 - \dfrac{18}{x^2} + \dfrac{35}{x^3} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Par produit} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \end{array}$$

La fonction ^{f} est continue sur $\mathbb{R}$, car f est un polynôme, et $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc $0 \in f(\mathbb{R})$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel α tel que $f(\alpha) = 0$

b) On calcule α avec la formule de Cardan en prenant : $p = -18$ et $q = 35$

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sqrt[3]{-\frac{35}{2} - \sqrt{\left(\frac{35}{2}\right)^2 + (-6)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{35}{2} + \sqrt{\left(\frac{35}{2}\right)^2 + (-6)^3}} \\
&= \sqrt[3]{-\frac{35}{2} - \sqrt{\frac{1225-864}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{35}{2} + \sqrt{\frac{1225-864}{4}}} \\
&= \sqrt[3]{-\frac{35}{2} - \sqrt{\frac{361}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{35}{2} + \sqrt{\frac{361}{4}}} \\
&= \sqrt[3]{-\frac{35}{2} - \frac{19}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{35}{2} + \frac{19}{2}} = \sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{-8} = -3 - 2 = -5
\end{aligned}$$

2) a) On développe l'expression de droite :

$$(x+5)(x^2 - 5x + 7) = x^3 - 5x^2 + 7x + 5x^2 - 25x + 35 = x^3 - 18x + 35$$

b) (E) : $(x+5)(x^2 - 5x + 7) = 0$

- $x + 5 = 0$ donc $x = -5$ **ou**
- $x^2 - 5x + 7 = 0$ donc $\Delta = 25 - 28 = -3 = (i\sqrt{3})^2$, $\Delta < 0$ 2 racines complexes conjuguées :

$$x_1 = \frac{5 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad x_1 = \frac{5 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Les solution de (E) sont donc : $S = \left\{-5\ ;\ \dfrac{5}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \dfrac{5}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

EXERCICE 3

QCM **4 points**

1) **Réponse d)** car $i\dfrac{z_1}{z_2} = e^{i\frac{\pi}{2}} \times \dfrac{\sqrt{6}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{3}\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}\,e^{i\frac{13\pi}{12}}$

2) **Réponse c)** car en posant $z = x + iy$, on a :

$$-z = \overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad -x - iy = x - iy \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

L'ensemble solution est l'axe des ordonnées (z imaginaire pur).

3) **Réponse a)** en posant A($-i$) et B(i), on a : $|z + i| = |z - i| \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{A}M = \mathrm{B}M$

L'ensemble des points M est donc la médiatrice de [AB] qui n'est autre que la droite des abscisses.

4) **Réponse c)** car $\dfrac{c}{b} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$ donc $\dfrac{c-b}{b} = \dfrac{(1+i)b - b}{b} = i$

On en déduit que : $\dfrac{|c-b|}{|b|} = |i| \quad \Leftrightarrow \quad |c - b| = |b|$ donc BC = BO le triangle OBC est isocèle en B

et $\left(\overrightarrow{\mathrm{BO}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right) = \arg\left(\dfrac{c-b}{b}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$ le triangle OBC est rectangle en B

EXERCICE 4

Vrai-Faux **4 points**

$$a = 2 + \frac{1}{2}i, \quad b = -1 - i, \quad c = 3 + i, \quad d = 5 + \frac{1}{2}i \quad \text{et} \quad e = 3 - 4i$$

1) **Affirmation 1 : Vraie**

Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ puis leur déterminant :

$z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = b - a = -1 - i - 2 - \dfrac{1}{2}i = -3 - \dfrac{3}{2}i = -3\left(1 + \dfrac{1}{2}i\right)$

$z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}} = c - a = 3 + i - 2 - \dfrac{1}{2}i = 1 + \dfrac{1}{2}i$

On a donc : $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = -3z_{\overrightarrow{\mathrm{AC}}} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 3\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont colinéaires donc les points A, B et C sont alignés.

2) **Affirmation 2 : Fausse**

$\mathrm{EB} = |-1 - i - 3 + 4i| = |-4 + 3i|\ \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$\mathrm{EC} = |3 + i - 3 + 4i| = |5i| = 5$

$\mathrm{ED} = \left|5 + \dfrac{1}{2}i - 3 + 4i\right| = \left|2 + \dfrac{9}{2}i\right| = \sqrt{4 + \dfrac{81}{4}} = \dfrac{\sqrt{97}}{2} \neq 5$

Les distances des points B, C et D au points E n'étant pas égales les points B, C et D n'appartiennent pas au cercle de centre E.

3) **Affirmation 3 : Vraie**
On pose : A(i) et B(-1). On a alors :
$|z-i| = |z+1| \quad \Leftrightarrow \quad |z - z_A| = |z - z_B| \quad \Leftrightarrow \quad AM = BM$

L'ensemble des points M est donc la médiatrice du segment [AB] donc cet ensemble est bien une droite.

4) **Affirmation 4 : Fausse**
On pose : $a = 1 + i\sqrt{3}$ cherchans la forme exponetielle de a

$$|a| = \sqrt{1+3} = 2 \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \quad \theta = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \quad \text{donc} \quad a = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$

On a alors : $a^4 = 2^4\,e^{i\frac{4\pi}{3}} = 16\left[\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)\right] = 16\left(-\dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8+8i\sqrt{3}$

$\left(1 + i\sqrt{3}\right)^4$ n'est donc pas un réel

Exercice 5

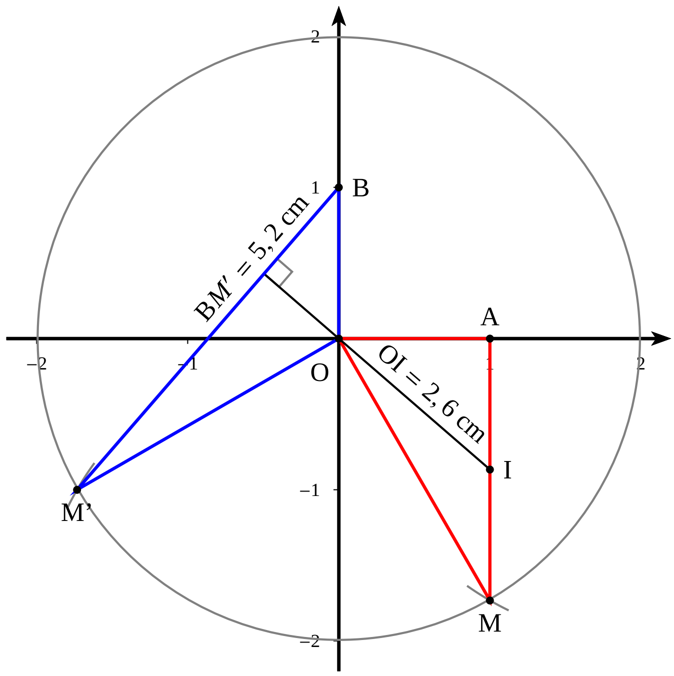
Problème **7 points**

1) a) $z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right] = 2\left(\dfrac{1}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$

b) $z_{M'} = -i\,z_M = -i(1 - i\sqrt{3}) = -i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} - i.$

$$\text{On a :} \quad |z_{M'}| = \sqrt{3+1} = 2 \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l} \cos\theta_{M'} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_{M'} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \theta_{M'} = -\frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$$

c) On a le graphique ci-dessous :



2) a) $z_{\text{I}} = \dfrac{z_{\text{A}} + z_M}{2} = \dfrac{1+x}{2} + i\,\dfrac{y}{2}$

b) $z_{M'} = -i\,z_M = -i(x+iy) = -ix + y = y - ix$

c) On a les coordonnées des points suivant : $\text{I}\left(\dfrac{1+x}{2}\,;\,\dfrac{y}{2}\right)$, $\text{B}(0\,;1)$, $M'(y\,;\,-x)$

d) La droite (OI) est la hauteur issue de O du triangle OBM' si $\overrightarrow{\text{OI}} \perp \overrightarrow{\text{B}M'}$

On a : $\overrightarrow{\text{OI}} \cdot \overrightarrow{\text{B}M'} = \begin{pmatrix} \dfrac{x+1}{2} \\ \dfrac{y}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ -x-1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}(x+1)y + \dfrac{1}{2}y\,(-x-1) = 0$

Le produit scalaire étant nul, les vecteurs sont orthogonaux. (OI) est donc la hauteur issue de O du triangle OBM'

e) On a : $\text{B}M'^2 = |z_{M'} - z_{\text{B}}|^2 = |y + i\,(-x-1)|^2 = y^2 + (-x-1)^2 = y^2 + (x+1)^2$

$\text{OI}^2 = |z_{\text{I}}|^2 = \dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} = \dfrac{y^2 + (x+1)^2}{4} = \dfrac{\text{BM}^2}{4}$

On a donc : $\text{B}M'^2 = 4\text{OI}^2$ donc $\text{B}M' = 2\text{OI}$