BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 7 ou 9

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

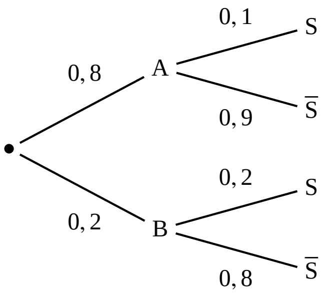
TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

EXERCICE 1 (4 points)

Partie A

1) D'après l'énoncé, on a : $P(\mathrm{A}) = 0,8)$, $P(\mathrm{B}) = 0,2$, $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{S}) = 0,1$ et $P_{\mathrm{B}}(S) = 0,2$.

On obtient alors l'arbre suivant :



2) a) $P(\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{S}}) = P(\mathrm{B}) \times P_{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{S}}) = 0,2 \times 0,8 = 0,16.$

b) $P(\overline{\mathrm{S}}) = P(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{S}}) + P(\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{S}}) = 0,8 \times 0,9 + 0,16 = 0,88$

3) $P_{\mathrm{S}}(\mathrm{B}) = \dfrac{P(\mathrm{B} \cap \mathrm{S})}{P(\mathrm{S})} = \dfrac{0,2 \times 0,2}{1 - 0,88} = \dfrac{0,04}{0,12} = \dfrac{1}{3} \simeq 0,33$

Partie B

1) On a vu que la probabilité de tirer une boîte de façon aléatoire dans le stock du grossiste sans trouver de pesticides est égale à 0,88. C'est une épreuve de Bernoulli.
On réitère 10 fois cette expérience de façon identique et indépendante (assimilable à un tirage sans remise). La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(10; 0,88)$

2) $P(\mathrm{X} = 10) = 0,88^{10} \simeq 0,28$

3) $P(\mathrm{X} \geqslant 8) = 1 - P(\mathrm{X} \leqslant 7) = 1 - \mathrm{binomFRép}(10, 0.88, 7) \simeq 0,89$

EXERCICE 2 (4 points)

1) **Proposition 1 : Fausse**

Une suite positive croissante et majorée converge. Par exemple, soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$

La fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est croissante sur $[1; +\infty[$, donc par somme la fonction $x \mapsto 2 - \dfrac{1}{x}$ est croissante sur $[1; +\infty[$. On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

De plus, on a : $0 < 2 - \dfrac{1}{n} < 2$

La suite (u_n) est donc positive, croissante et majorée par 2, donc la suite (u_n) est convergente.

2) a) **Proposition 2 : Fausse**

$$g(x) = 2x \quad \Leftrightarrow \quad 2x\ln(2x+1) = 2x \quad \Leftrightarrow \quad 2x\,[\ln(2x+1) - 1] = 0$$

$$2x = 0 \text{ ou } \ln(2x+1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } 2x+1 = e \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ ou } x = \frac{e-1}{2}$$

L'équation $g(x) = 2x$ admet donc deux solutions : 0 et $\dfrac{e-1}{2}$

b) **Proposition 3 : Vraie**

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe en $\frac{1}{2}$ est donné par : $g'\left(\frac{1}{2}\right)$

$$g'(x) = 2\ln(2x+1)+2x\times\frac{2}{2x+1} = 2\ln(2x+1)+\frac{4x}{2x+1} \quad \text{donc} \quad g'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln 2+\frac{2}{1+1} = \ln 4+1$$

3) **Proposition 4 : Vraie**

$P(X \leqslant 2) = 0,15 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-2\lambda} = 0,15 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2\lambda} = 0,85 \quad \Leftrightarrow \quad -2\lambda = \ln(0,85) \quad \Leftrightarrow$
$\lambda = -\dfrac{\ln 0,85}{2} \simeq 0,081$

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi la spécialité

1) On pose $z = \dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i$. On a alors :

$$|z| = \frac{9+3}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{3}{4}\times\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \theta = \frac{\pi}{6} \ [2\pi]$$

On a alors : $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

2) a) On a : $z_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}z_n$ donc $|z_{n+1}| = \left|\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}z_n\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}|z_n|$

On en déduit alors : $r_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}r_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

La suite (r_n) est alors une suite géométrique de raison $q = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $r_0 = 1$

b) $r_n = r_0\, q^n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

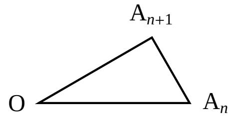
c) $OA_n = |z_n| = r_n$ or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,866 < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} OA_n = 0$

3) a) Pour $P = 0,5$ on trouve $n = 5$

b) Cet algorithme permet de déterminer à partir de quel rang n la distance OA_n est inférieur à une valeur donnée P.
Si pour $P = 0,01$, on a $n = 33$. On peut dire que $OA_{32} > 0,01$ et $OA_{33} \leqslant 0,01$.
En effet, on trouve avec la calculatrice : $R_{32} = 0{,}010\,02$ et $R_{33} = 0{,}008\,68$

4) a) OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1} si et seulement si

$$OA_n^2 = OA_{n+1}^2 + A_nA_{n+1}^2$$



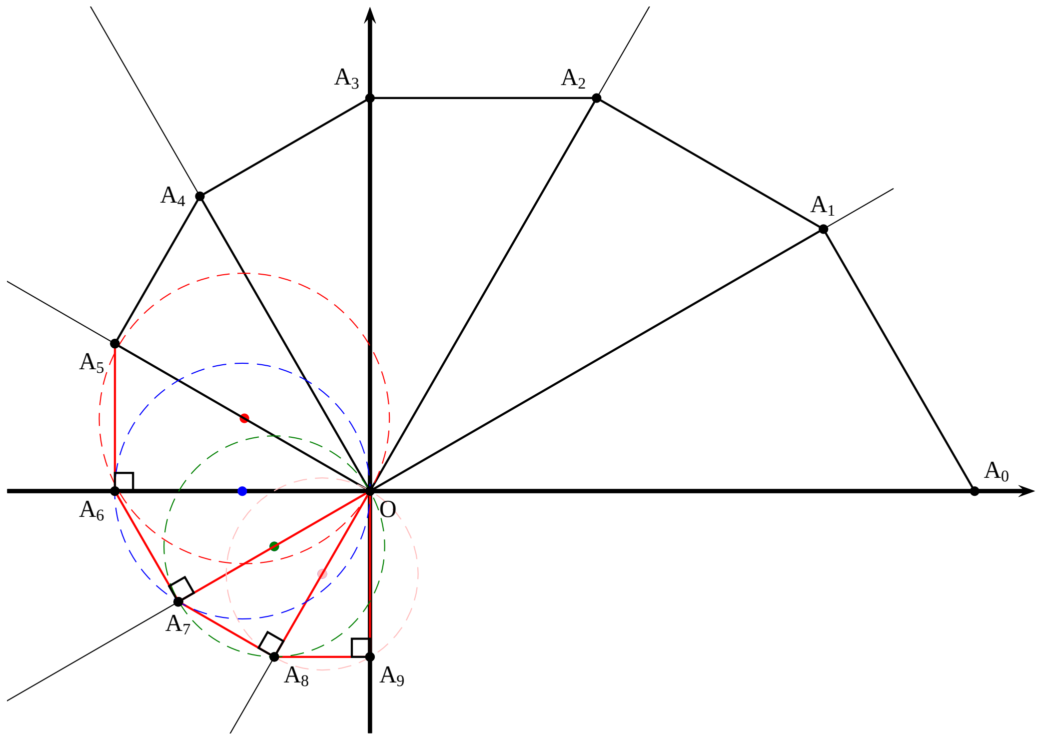
$$A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n - z_n\right| = \left|-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right| |z_n| = \frac{\sqrt{1+3}}{4} r_n = \frac{1}{2} r_n$$

On a alors : $OA_{n+1}^2 + A_nA_{n+1}^2 = \frac{3}{4} r_n^2 + \frac{1}{4} r_n^2 = r_n^2 = OA_n^2$

b) Pour que A_n soit sur l'axe des ordonnées, on doit avoir : $\arg(z_n) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

On doit donc avoir : $\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad n = 3 + 6k,\ \ k \in \mathbb{Z}$

c)
- Avec une équerre : pour tracer A_{n+1} à partir de A_n, on projette A_n orthogonalement par rapport à la droite formant un angle de $\frac{\pi}{6}$ avec la droite (OA_n).
- A la règle et au compas : A_{n+1} est l'intersection du cercle de diamètre $[OA_n]$ avec la droite formant un angle de $\frac{\pi}{6}$ avec la droite (OA_n).



EXERCICE 4 **(7 points)**

Partie A

1) D'après la représentation de la fonction f, on déduit les renseignements suivants :
- Si $x < \alpha\ (-1 < \alpha < 0)$ f est décroissante donc $f'(x) < 0$
- Si $x = \alpha\ (-1 < \alpha < 0)$ f admet un minimum en α donc $f'(\alpha) = 0$
- Si $x > \alpha\ (-1 < \alpha < 0)$ f est croissante donc $f'(x) > 0$

La droite de la situation 2 ne correspond pas à la dérivée de f car la dérivée s'annulerai en -1 et non α

La courbe $\mathscr{C}_2$ de la situation 3 ne correspond pas à la dérivée de f car la dérivée serait toujours positive.

Seule la courbe $\mathscr{C}_2$ de la **situation 1** correspond aux conditions ci-dessus.

2) L'équation réduite de la tangente en A a pour expresion : $y = f'(0)x + f(0)$

Comme A(0 ;2) est sur $\mathscr{C}_1$ donc : $f(0) = 2$

Comme B(0 ;1) est sur $\mathscr{C}_2$ donc : $f'(0) = 1$

L'équation de la tangente Δ : $y = x + 2$

3) a) Comme $f(0) = 2$ si $f(x) = e^{-x} + ax + b$ alors $1 + b = 2 \Leftrightarrow b = 1$

b) Comme $f'(0) = 1$ si $f'(x) = -e^{-x} + a$ alors $-1 + a = 1 \Leftrightarrow a = 2$

Conclusion : $f(x) = e^{-x} + 2x + 1$

4) On a : $f'(x) = -e^{-x} + 2$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 2 \Leftrightarrow x = -\ln 2 \quad (\alpha = -\ln 2 \simeq -0,69)$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -e^{-x} + 2 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 2 \Leftrightarrow x > -\ln 2$

La fonction f est donc croissante si $x > -\ln 2$ et décroissante si $x < -\ln 2$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x + 1 = +\infty$

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - (x + 2)$.

1) a) $g'(x) = f'(x) - 1 = -e^{-x} + 1$

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -e^{-x} + 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow x > 0$

La fonction g est donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. La fonction g admet donc un minimum en 0.

b) $g(0) = f(0) - 2 = 0$

Comme g admet un minimum en 0, $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \geqslant x + 2$

La courbe $\mathscr{C}_1$ est donc toujours au-dessus de Δ.

2) $g(x) = e^{-x} + 2x + 1 - x - 2 = e^{-x} + x - 1$

g est la somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, donc g est continue sur $\mathbb{R}$ et donc admet une primitive G sur $\mathbb{R}$ telle que : $G(x) = -e^{-x} + \dfrac{1}{2}x^2 - x$

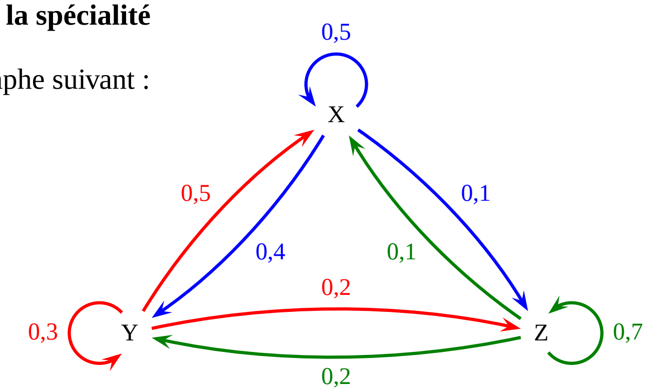
L'aire $\mathscr{A}$ du logo colorié en gris vaut donc :

$$\mathscr{A} = \int_{-2}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x\right]_{-2}^{2} = (-e^{-2}+2-2) - (-e^{2}+2+2) = e^2 - 4 - e^{-2} \simeq 3,25 \text{ u.a.}$$

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats ayant suivi la spécialité

1) a) On obtient le graphe suivant :



b) $x_{n+1} = 0,5x_n + 0,5y_n + 0,1z_n$

c) $z_n = 1 - x_n - y_n$

On a donc :

- $x_{n+1} = 0,5x_n + 0,5y_n + 0,1(1 - x_n - y_n) = 0,4x_n + 0,4y_n + 0,1$
- $y_{n+1} = 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2(1 - x_n - y_n) = 0,2x_n + 0,1y_n + 0,2$

2) a) Pour rentrer l'algorithme dans la Ti82stats, on rentre auparavant les matrice [A], [B] et on appelle [C] la matrice $\mathbf{U}_0$. On appelle [D] la matrice [U] et on la dimensionne en 2×1. On obtient alors les résultats suivants :

Pour $n = 1$ $[\mathrm{U}] = \begin{pmatrix} 0,42 \\ 0,33 \end{pmatrix}$ et pour $n = 3$ $[\mathrm{U}] = \begin{pmatrix} 0,3868 \\ 0,3117 \end{pmatrix}$

b) Le mois d'avril correspond à $n = 3$. La probabilité de X au mois d'avril est de 0,3868

3) a) $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{C} - \mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{N} \times \mathbf{C} = \mathbf{B}$

b) On multiplie à gauche la dernière égalité par $\mathbf{N}^{-1}$. On a alors :

$$\mathbf{N}^{-1} \times \mathbf{N} \times \mathbf{C} = \mathbf{N}^{-1} \times \mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{C} = \mathbf{N}^{-1} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \dfrac{45}{23} & \dfrac{20}{23} \\ \dfrac{10}{23} & \dfrac{30}{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4,5+4}{23} \\ \dfrac{1+4}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{8,5}{23} \\ \dfrac{7}{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{17}{46} \\ \dfrac{7}{23} \end{pmatrix}$$

4) a) On a : $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{U}_n + \mathbf{B} - \mathbf{C}$ (1)

Or on sait que : $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B}$ en remplaçant dans (1), on a :

$$\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{A} \times \mathbf{U}_n + \mathbf{B} - \mathbf{A} \times \mathbf{C} - \mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{U}_n - \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{V}_n$$

b) Pour le mois de mai, $n = 4$, on a alors à l'aide de la calculatrice

$$\mathbf{U}_4 = \mathbf{A}^4 \times (\mathbf{U}_0 - \mathbf{C}) + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0,3794 \\ 0,30853 \end{pmatrix}$$

On trouve alors les probabilités suivantes pour le mois de mai :

- $x_4 = 0,3794$
- $y_4 = 0,30853$
- $z_4 = 1 - x_4 - y_4 = 031207$

⚠ On peut retrouver ces résultats en utilisant l'algorithme en rentrant $n = 4$