BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 9

Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

EXERCICE 1 (4 points)

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.
On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

- évènement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
- évènement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
- évènement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1) Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.
2) a) Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap \overline{S}$?
   b) Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à $0,88$.
3) On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
   Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans trace de pesticides.

1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2) Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.
3) Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

EXERCICE 2 (4 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1) **Proposition 1 :** « Toute suite positive croissante tend vers $+\infty$ »
2) g est la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par : $g(x) = 2x\ln(2x+1)$
   a) **Proposition 2 :** « Sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\dfrac{e-1}{2}$ »
   b) **Proposition 3 :** « Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentation de la fonction g au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est : $1 + \ln 4$ »

3) La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise, est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.
On sait que $P(X \leqslant 2) = 0,15$.

Proposition 4 : « La valeur approchée à 10^{-3} de λ est : 0,081 »

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats ayant suivi la spécialité

Chaque jeune parent utilise chaque mois une seule marque de petits pots pour bébé. Trois marques X, Y et Z se partagent le marché. Soit n un entier naturel.
On note : X_n l'évènement « la marque X est utilisée le mois n »,
Y_n l'évènement « la marque Y est utilisée le mois n »,
Z_n l'évènement « la marque Z est utilisée le mois n ».

Les probabilités des évènements X_n, Y_n, Z_n sont notées respectivement x_n , y_n , z_n.
On a donc : $x_n + y_n + z_n = 1$
La campagne publicitaire de chaque marque fait évoluer la répartition.

Un acheteur de la marque X le mois n, a le mois suivant :
- 50 % de chance de rester fidèle à cette marque,
- 40 % de chance d'acheter la marque Y,
- 10 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Y le mois n, a le mois suivant :
- 30 % de chance de rester fidèle à cette marque,
- 50 % de chance d'acheter la marque X,
- 20 % de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Z le mois n, a le mois suivant :
- 70 % de chance de rester fidèle à cette marque,
- 10 % de chance d'acheter la marque X,
- 20 % de chance d'acheter la marque Y.

1) a) Dessiner un graphe probabiliste correspondant à cette situation.
b) Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n , y_n et z_n.
On admet que :
$y_{n+1} = 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2z_n$ et que $z_{n+1} = 0,1x_n + 0,2y_n + 0,7z_n$.
c) Exprimer z_n en fonction de x_n et y_n.
En déduire l'expression de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

2) On définit la suite $(\mathbf{U}_n)$ par $\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

On admet que, pour tout entier naturel n, : $\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{A} \times \mathbf{U}_n + \mathbf{B}$ où $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$.

Au début de l'étude statistique (mois de janvier 2014 : $n = 0$), on estime que $\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$.

On considère l'algorithme suivant :

Variables : n et i entiers naturels
[A], [B] et [U] matrices
Entrées et initialisation
Lire n
$0 \to i$
$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \to [A]$
$\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix} \to [B]$
$\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix} \to [U]$
Traitement
tant que $i < n$ **faire**
$[A] \times [U] + [B] \to [U]$
$i + 1 \to i$
fin
Sorties : Afficher [U]

a) Donner les résultats affichés par cet algorithme pour $n = 1$ puis pour $n = 3$.

b) Quelle est la probabilité d'utiliser la marque X au mois d'avril ?

Dans la suite de l'exercice, on cherche à déterminer une expression de $\mathbf{U}_n$ en fonction de n.

On note $\mathbf{I}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{N}$ la matrice $\mathbf{I} - \mathbf{A}$.

3) On désigne par $\mathbf{C}$ une matrice colonne à deux lignes.

a) Démontrer que $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B}$ équivaut à $\mathbf{N} \times \mathbf{C} = \mathbf{B}$.

b) On admet que $\mathbf{N}$ est une matrice inversible et que $\mathbf{N}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix}$.

En déduire que $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{17}{46} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix}$.

4) On note $\mathbf{V}_n$ la matrice telle que $\mathbf{V}_n = \mathbf{U}_n - \mathbf{C}$ pour tout entier naturel n.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{A} \times \mathbf{V}_n$.

b) On admet que $\mathbf{U}_n = \mathbf{A}^n \times (\mathbf{U}_0 - \mathbf{C}) + \mathbf{C}$.
Quelles sont les probabilités d'utiliser les marques X, Y et Z au mois de mai ?

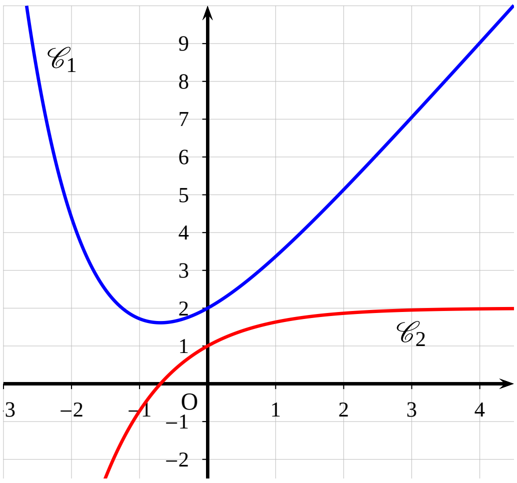
EXERCICE 4 (7 points)

Partie A

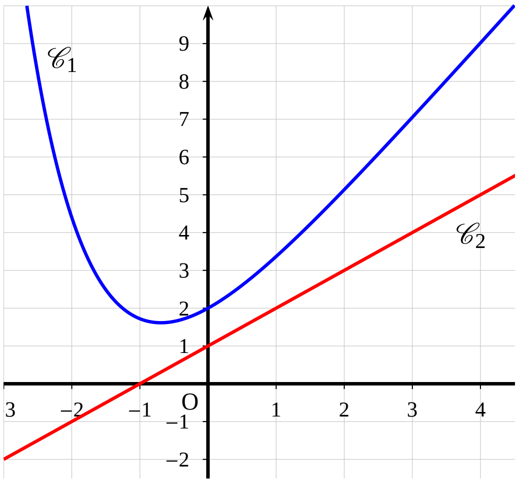
f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est la fonction dérivée de la fonction f.
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f'.
Le point A de coordonnées (0 ; 2) appartient à la courbe $\mathscr{C}_1$.
Le point B de coordonnées (0 ; 1) appartient à la courbe $\mathscr{C}_2$.

1) Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de la fonction f. Sur l'une d'entre elles, la courbe $\mathscr{C}_2$ de la fonction dérivée f' est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.

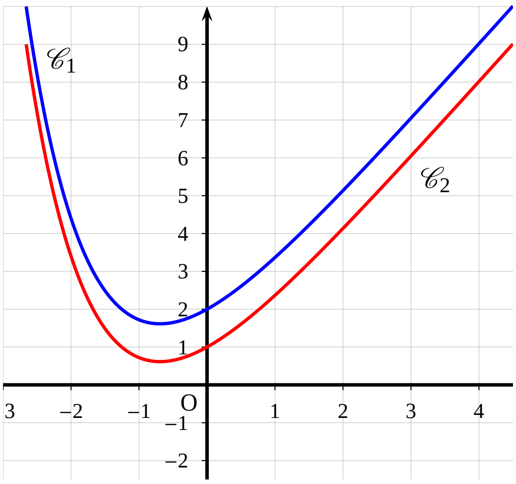
Situation 1



Situation 2 ($\mathscr{C}_2$ est une droite)



Situation 3



2) Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ en A.

3) On sait que pour tout réel x, $f(x) = e^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.

   a) Déterminer la valeur de b en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.

   b) Prouver que $a = 2$.

4) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - (x + 2)$.

1) a) Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.

   b) En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}_1$ par rapport à la droite Δ.

La figure 2 ci-dessous représente le logo d'une entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe $\mathscr{C}_1$ et de la droite Δ, comme l'indique la figure 3 ci-dessous. Afin d'estimer les coûts de peinture, il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris.

figure 2

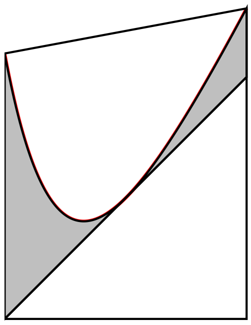
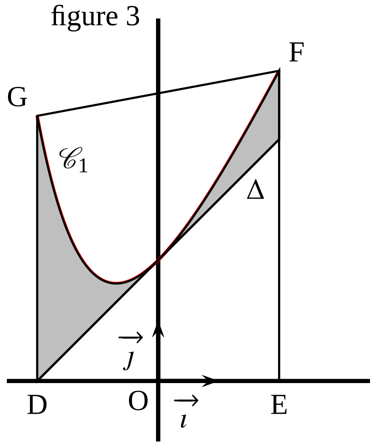


figure 3



Le contour du logo est représenté par le trapèze DEFG où :

- D est le point de coordonnées $(-2\ ;\ 0)$,
- E est le point de coordonnées $(2\,;\,0)$,
- F est le point d'abscisse 2 de la courbe $\mathscr{C}_1$,
- G est le point d'abscisse -2 de la courbe $\mathscr{C}_1$.

La partie du logo colorée en gris correspond à la surface située entre la droite Δ, la courbe $\mathscr{C}_1$, la droite d'équation $x = -2$ et la droite d'équation $x = 2$.

2) Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du logo colorée en gris (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} du résultat).