# BACCALAURÉAT BLANC

# DE MATHÉMATIQUES

# – SÉRIE S –



**Durée de l'épreuve : 4 HEURES**
**Les calculatrices sont AUTORISÉES**

**Coefficient : 9**

*Le candidat doit traiter trois exercices plus un exercice suivant sa spécialité. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :*

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

## EXERCICE 1 (5 points)

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$

1) On considère l'algorithme suivant :

**Variables** : $n$ entier, $u$ réel
**Entrées et initialisation**
  Lire $n$
  $1 \to u$
**Traitement**
  **pour** $i$ variant de 1 à $n$ **faire**
    $\sqrt{2u} \to u$
  **fin**
**Sorties** : Afficher $u$

a) Donner une valeur approchée à $10^{-4}$ près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

b) Que permet de calculer cet algorithme ?

c) Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de $n$.

| $n$ | 1 | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| Valeur affichée | 1,414 2 | 1,957 1 | 1,998 6 | 1,999 9 | 1,999 9 |

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite $(u_n)$ ?

2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $0 < u_n \leqslant 2$.

b) Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$. On pourra comparer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

c) Démontrer que la suite $(u_n)$ est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3) On considère la suite $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par $v_n = \ln u_n - \ln 2$.

a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b) Déterminer, pour tout entier naturel $n$, l'expression de $v_n$ en fonction de $n$, puis de $u_n$ en fonction de $n$.

c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

d) Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de $n$ telle que $u_n > 1,999$.

**Variables** : $n$ entier, $u$ réel
**Entrées et initialisation**
  $0 \to n$
  $1 \to u$
**Traitement**
  ...
  ...
  ...
  ...
**Sorties** : ...

## EXERCICE 2 (3 points)

On donne la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{2}x}$

1) Démontrer que pour tout réel $x$, on a : $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x+4)e^{\frac{1}{2}x}$

2) a) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $f$

b) Montrer que la fonction $f$ peut se mettre sous la forme : $2\left(\frac{1}{2}x\,e^{\frac{1}{2}x}\right)+2e^{\frac{1}{2}x}$

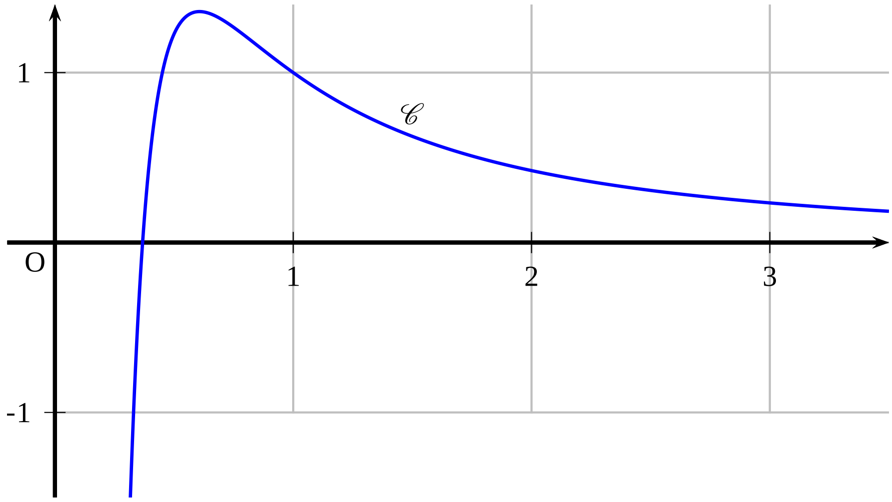
En déduire la limite de la fonction $f$ en $-\infty$. On rédigera soigneusement cette limite.

3) Déterminer les variations de la fonction $f$ puis dresser le tableau de variation

## EXERCICE 3 (7 points)

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{x^2}$

et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :




1) a) Étudier la limite de $f$ en 0.

b) Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}$ ? En déduire la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2) a) On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Démontrer que, pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-1-2\ln(x)}{x^3}$

b) Résoudre sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x)>0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

c) Dresser le tableau des variations de la fonction $f$.

3) a) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4) Pour tout entier $n\geqslant 1$, on note $I_n$ l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x=\dfrac{1}{e}$ et $x=n$.

a) Démontrer que $0\leqslant I_2\leqslant e-\dfrac{1}{2}$.

On admet que la fonction $F$, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{-2-\ln(x)}{x}$, est une primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b) Calculer $I_n$ en fonction de $n$.

c) Étudier la limite de $I_n$ en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

## EXERCICE 4 (5 points)

**Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

*Les trois questions sont indépendantes*

1) a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $2^{3n} \equiv 1 \mod 7$

   b) En déduire le reste de la division par 7 de : $2011^{2014}$

2) a) Énoncer le critère d'arrêt des nombres premiers.

   b) Montrer alors que 257 est premier. On expliquera clairement la méthode utilisée.

3) À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

*Étape* 1 : à la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre $m$ correspondant dans le tableau.

*Étape* 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m+5$ par 26 et on le note $p$.

*Étape* 3 : Au nombre $p$, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

a) Coder la lettre U.

b) Compléter l'algorithme suivant permettant de calculer la valeur de $p$ par soustractions successives, le nombre $m$ étant donné.

**Variables** : $m$ et $p$ entiers naturels

**Entrées et initialisation**

Lire $m$

$0 \rightarrow p$

**Traitement**

...

...

...

...

**Sorties** : ...

c) Trouver un nombre entier $x$ tel que : $9x \equiv 1 \mod 26$.

d) Démontrer alors l'équivalence :

$$9m+5 \equiv p \mod 26 \quad \Leftrightarrow \quad m \equiv 3p-15 \mod 26$$

e) Décoder alors la lettre B.